1. On définit sur $[1, +\infty]$ la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} n + n^3(x-n) & \text{si } x \in [n - \frac{1}{n^2}, n] \\ n - n^3(x-n) & \text{si } x \in [n, n + \frac{1}{n^2}] \\ 0 & \text{sinon, pour tout } n \in \mathbb{N},\ n > 1. \end{cases}$$

   Montrer que f est continue, que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, mais que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

2. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que u_n et v_n sont adjacentes. En déduire que e est irrationnel.

3. $u_n = \ln(\frac{n^2-1}{n^2})$. Montrer que $\sum u_n$ converge et trouver sa somme.

4. Nature des séries de terme général:
   (a) $\frac{e^n}{n^2}$
   (b) $\frac{2^n + \ln n}{e^n}$
   (c) $\ln(1 + \frac{1}{n})$
   (d) $\ln(1 - \frac{1}{n^2})$
   (e) $(\sin n)e^{-n}$
   (f) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
   (g) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

5. Si u_n et v_n sont les deux dernières suites de l'exercice précédent, montrer que u_n et v_n sont équivalentes.
   Conclusion?

6. Quel est le cardinal du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$?

7. On dit qu'une permutation c est un k-cycle s'il existe $a_1, \ldots, a_k$ tels que $c(a_1) = a_2$, $c(a_2) = a_3$, ..., $c(a_k) = a_1$ et que c laisse les autres éléments invariants.

   On note alors $c = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, et $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ est appelé support du cycle c.

   Exemple: $(1, 2, 4)$ est un 3-cycle, $(1, 5)$ est un 2-cycle ou transposition.

   - Quel est l'ordre d'un k-cycle en tant qu'élément du groupe des permutations?
   - Quel est la nature de l'inverse d'un cycle?
   - Montrer qu'un produit de cycles à supports disjoints ne dépend pas de l'ordre des facteurs.
   - Soit $c \in \mathcal{S}_n$. Montrer que c s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints.
   - Montrer enfin qu'une telle décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.
   - Soient a l'élément de $\mathcal{S}_{10}$ $\left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 8 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right\}$.

     Calculer a^{1999}.