UJF - SM3a2	TD 5	19/11/99

1. Soit $a, b > 0$ et D le domaine du plan $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$.
   Reconnaitre D; calculer son aire en se ramenant a des intégrales simples en x et y, et par le changement de variables $x = a\, r \cos\theta$, $y = b\, r \sin\theta$.

2. Calculer le volume délimité par les surfaces d'équations $\{z = x\}$ et $\{x^2 + 2y^2 = z\}$.

3. Soit T l'intérieur du tétraèdre $OABC$ avec $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$.
   Calculer $I = \int\int\int_T xy\, dxdydz$.

4. Calculer les valeurs et vecteurs propres de $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 13 & 2 & -7 \\ 20 & 2 & -10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.
   Ces matrices sont-elles diagonalisables? Si oui, les diagonaliser.

5. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Donner les valeurs propres des matrices $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$. Sont-elles diagonalisables?

6. Trouver les valeurs propres des matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a \\ a & \dots & a & 2a \end{bmatrix}$
   et $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Sont-elles diagonalisables?

7. Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente (i.e telle que $N^n = 0$).
   Montrer que la seule valeur propre de N est 0. En deduire que $\det(I + N) = 1$.
   Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $MN = NM$, montrer que $\det(M + N) = \det(M)$. (on commencera par le cas M inversible)

8. Donner le rayon de convergence des séries entières:
   (a) $\sum n^n z^n$; (b) $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$; (c) $\sum (\ln n)\, z^n$; (d) $\sum (\mathrm{ch}\ n)\, z^n$; (e) $\sum z^{n^2}$; (f) $\sum \frac{z^{n^3}}{n^2}$.

9. Donner le rayon de convergence, l'intervalle de convergence et la somme sur cet intervalle des séries entières:
   (a) $\sum (-1)^n z^n$; (b) $\sum \frac{z^n}{n!} \cos(n\theta)$; (c) $\sum (n+1) z^n$; (d) $\sum n^2 z^n$; (e) $\sum \frac{z^n}{n}$;
   (f) $\sum \frac{z^n}{2n+1}$; (g) $\sum (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) z^n$; (h) $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$; (i) $\sum (\sin \pi\sqrt{n^2+1})\, z^n$.

10. Soit (a_n) une suite telle que $\frac{a_{n+3}}{a_n} \to l \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $l^{-1/3}$.

11. On considère les suites de fonctions $a_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$, $b_n(x) = x^n(1 - x)$ sur $[0, 1]$, $f_n(x) = \cos^n x \,.\sin x$ sur sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $g_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$ sur $\mathbb{R}_+$. Ces suites convergent-elles simplement, uniformément sur leurs intervalles de définition? Dans ce cas, préciser leur limite.

12. La suite de fonctions $(\sin x)^n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$? Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$?