UJF - SM3a2	TD 4	1/10/99

1. Montrer que $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_4)\ldots(a_{k-1}, a_k)$.
   Quelle est la signature d'un k-cycle?

2. Calculer la signature des permutations:
   (a) $\left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{array} \right\}$
   (b) $\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right\}$
   (c) $\left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right\}$
   (d) $\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 1 & 11 & 5 & 8 & 6 & 2 & 9 & 7 & 3 & 4 \end{array} \right\}$

3. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \forall i, \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \leq 1\}$.
   (a) Montrer que E est stable par multiplication.
   (b) Montrer que $(\exists k \in \mathbb{R})(\forall M \in E)(|\det M| \leq k)$.
   (c) En déduire que $(\forall M \in E)(|\det M| \leq 1)$.

4. Soient $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ des réels et p un entier tel que $p \leq n-1$. Calculer le déterminant de la matrice M de coefficients $m_{ij} = (a_i + b_j)^p$. (on pourra écrire M comme produit de deux matrices)

5. Soit $u_n = \lambda_1 a_1^n + \lambda_2 a_2^n + \ldots + \lambda_p a_p^n$ où les a_i sont des complexes deux à deux distincts, et les λ_i des complexes non nuls.
   On suppose que $\lim_{+\infty} u = 0$ et on veut montrer que pour tout i, $|a_i| < 1$.
   Soit $U_n = (u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1})$, $A_n = (a_1^n, a_2^n, \ldots, a_p^n)$.
   - Montrer que pour tout n, $U_n = MA_n$ où M est une matrice indépendante de n.
   - Montrer que pour tout i, la suite $(a_i^n)_n$ est combinaison linéaire des suites $(u_n)_n, \ldots, (u_{n+p-1})_n$.
   - Conclure.

6. Soit $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \ldots & \ldots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$ et $P = a_0 + a_1 X + \ldots a_{n-1} X^{n-1}$.
   Montrer que $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k)$ où $\omega_k = e^{2i\pi k/n}$. (considérer $M\Omega$, Ω étant la matrice de Van Der Monde des ω_k)

7. Nature des séries $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

8. Nature en fonction de $x, y \in \mathbb{R}$ de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n + y^n}$.

9. Nature de la série de terme général $u_n = \sin 2\pi\sqrt{n^4 + 1}$.

10. On considère $\sum_{n \geq 1} (-1)^n (1 - \cos \frac{1}{n^\alpha})$, avec $\alpha \geq 0$.
    Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la série est
    - absolument convergente
    - convergente mais non absolument convergente

11. Soit (u_n) une suite à terme strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On veut étudier la nature de la série $\sum u_n$.
    (a) Montrer que $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + O(\frac{1}{n^2})$.
    (b) En déduire que la suite $\ln(n^\alpha u_n)$ converge.
    (c) Conclure.

12. Soit u_n la suite définie par $u_0 > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ ou $a, b > 0$. Donner la nature de la série $\sum u_n$, et sa somme en cas de convergence.