UJF - SM3a2	Algèbre - TD 2	30/9/99

1. Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$: $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & m+1 \\ mx+y+(m-1)z & = & m \\ x+my+z & = & 1 \end{array} \right.$.

2. Montrer que si les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^k$ $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u)$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)$ sont liées, $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u+v)$ est liée.

3. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, s$ des réels. Résoudre le système: $\left\{ \begin{array}{rcl} x_0+x_1 & = & a_1 \\ x_0+x_2 & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0+x_n & = & a_n \\ x_0+x_1+\ldots+x_n & = & s \end{array} \right.$.

4. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

6. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$.

7. Calculer avec $\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$: $\begin{vmatrix} \omega & \omega \\ -1 & \omega \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$.

8. Montrer que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

9. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

   Montrer que $\Delta_n = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})\Delta_{n-1}$; en déduire Δ_n.
   (Δ_n est appelé déterminant de Vandermonde des x_i)

10. Soient E, F et G des espaces vectoriels, et $f : E \times F \to G$ une application linéaire et bilinéaire.
    Montrer que f est l'application nulle.

11. Soit A une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent -1 ou 1.
    Montrer que 2^{n-1} divise son déterminant.