exercices théoriques

1. Manipulation d'expressions :

(a) simplifier $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}+\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$

(b) simplifier $\dfrac{e^x+e^{2x}}{(e^x)^2}-1$

(c) développer $(e^x+e^{-x})^4$

(d) résoudre $e^x-2e^{-x}=-2$

(e) résoudre $\ln|x-1|+\ln|x+1|=0$

(f) si $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$, déterminer $f\circ f$

corrigé succinct :

(a) l'expression vaut 0 : en effet, le second terme de la somme $\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^x}{e^x}.\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ est l'opposé du premier terme...

(b) $\dfrac{e^x+e^{2x}}{(e^x)^2}-1=\dfrac{e^x+e^{2x}-(e^x)^2}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x)^2}=e^{-x}$

(c) On développe par la formule du binôme $(e^x)^4+4(e^x)^3e^{-x}+6(e^x)^2(e^{-x})^2+4e^x(e^{-x})^3+(e^{-x})^4$ et on obtient $e^{4x}+4e^{2x}+6+4e^{-2x}+e^{-4x}$.

(d) Quand une équation fait apparaître uniquement des exponentielles de l'inconnue on peut souvent se ramener à une équation polynômiale en posant $e^x=X$. Ainsi, l'équation devient ici $X-2/X=-2$ avec $X>0$ (car $X=e^x>0$). Elle est donc équivalente à $X^2+2X-2=0$ dont le discriminant est 12, et les solutions $\dfrac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$. L'unique solution $X>0$ est donc $X=-1\pm\sqrt{3}$, qui correspond à $\boxed{x=\ln(\sqrt{3}-1).}$

(e) L'équation est définie pour $x\neq\pm1$. On peut donc, pour $x\neq\pm1$ transformer l'équation en les équations équivalentes $\ln|x^2-1|=0$, $|x^2-1|=1$, $x^2-1=\pm1$, soit finalement $x^2=0$ ou $x^2=2$ dont les trois solutions sont $\boxed{x=0,\ x=\sqrt{2}\text{ et }x=-\sqrt{2}.}$

(f) On trouve $(f\circ f)(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+6x^2}}$

2. Déterminer les limites des expressions suivantes :

(a) $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cos(x)$

(b) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{x+x^2}$

(c) $\lim_{x\to0}x\sin(1/x)$

(d) $\lim_{x\to+\infty}x^3\exp(-x)$

(e) $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x\exp(1/x)}$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\exp(1/x)}$

corrigé succinct :

(a) On peut majorer $|f(x)|$ par e^{-x}, qui tend vers 0 en $+\infty$, donc f tend vers 0.

(b) On peut décomposer $\dfrac{\sin(2x)}{x+x^2}=\dfrac{\sin(2x)}{2x}\dfrac{2x}{x+x^2}$ puis simplifier par x la deuxième fraction : $\dfrac{\sin(2x)}{x+x^2}=\dfrac{\sin(2x)}{2x}\dfrac{2}{1+x}$.
Alors le premier facteur tend vers 1 (limite usuelle) et le second, vers 2.
La limite cherchée est donc 2.

(c) x tend vers 0 en 0 et le sinus reste majoré par 1 en valeur absolue, donc la limite est nulle.

(d) On peut détailler ainsi : $x^3\exp(-x)=x^3/\exp(x)$, et "l'exponentielle l'emporte devant tout polynôme"...la limite est donc nulle.

(e) $x\exp(1/x)=\exp(1/x)/(1/x)$, en posant $y=1/x$ on voit que la limite en 0 de cette expression est la limite en $+\infty$ de $\exp(y)/y$, qui tend vers l'infini (l'exponentielle l'emporte sur tout polynôme).

(f) L'exponentielle tend vers $\exp(0)=1$, donc la limite est $+\infty$.

3. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $a(x)=-(2x-3)^4$

(b) $b(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ (A et φ constantes)

(c) $c(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(d) $d(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

corrigé succinct :

$a'(x)=-2\times4\times(2x-3)^{4-1}=-8(2x-3)^3$ (surtout ne pas développer l'expression pour la dériver ! ! !)

$b'(t)=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

On peut dériver c en exprimant $c(x)$ comme le produit $x(x^2+1)^{-1/2}$:

$c'(x)=(x^2+1)^{-1/2}+x(-\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-3/2}\times2x)$.

Pour simplifier l'expression, on factorise le x^2+1 qui intervient avec le plus bas degré : ainsi,

$$\boxed{c'(x)=(x^2+1)^{-3/2}(x^2+1-x^2)=(x^2+1)^{-3/2}.}$$

la dérivée de $d(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ est

$$\frac{1+2x/2\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

4. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions :

$a(x)=\cos x$, $b(x)=\frac{1}{x}$, (*) $c(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

corrigé succinct : La dérivée de $x \mapsto \cos(x)$ est $-\sin(x) = \cos(x + \pi/2)$ (utiliser un cercle trigonométrique !). Donc par récurrence immédiate,

$$\boxed{a^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2).}$$

De même $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{1}{x}) = (-1)(-2) \times \ldots \times (-n)x^{-(n+1)}$, donc $\boxed{b^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.}$

On procède de même pour c : $c'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $c''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, et finalement : $\boxed{c^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}.}$

5. Si $x \in [-1; 1]$ on définit $\arccos(x)$ comme l'unique nombre dans $[0; \pi]$ dont le cosinus vaut x.
   (a) montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$, $\cos(\arccos(x)) = x$
   (b) montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
   (c) en dérivant la première relation ci-dessus, déterminer $\arccos'(x)$
   (d) déterminer les valeurs de $\arccos$ en 0, 1, -1, $\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{3}/2$, $\cos(2\pi)$
   (e) que peut-on dire de $\arccos(\cos(x))$?

   (a) par définition ! $\arccos(x)$ est un (l'unique) angle dont le cosinus vaut x...
   (b) Comme $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on a $\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x)) = 1$ donc $\sin^2(\arccos(x) = 1 - x^2$. Donc $\sin(\arccos(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
   Mais $\arccos(x)$ est entre 0 et π, son sinus est donc positif, et donc $\sin(\arccos(x) = \sqrt{1-x^2}$.
   (c) On dérive l'égalité $\cos(\arccos(x)) = x$, en simplifiant le terme de gauche par dérivation d'une composée : $\arccos'(x) \times -\sin(\arccos(x)) = 1$.
   Ainsi, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (d) On peut utiliser simplement la définition : chercher un angle "remarquable" dont le cosinus a la bonne valeur, et vérifier qu'il est bien entre 0 et π : c'est alors l'arccos.
   Ainsi par exemple, pour trouver $\arccos(0)$: on cherche un angle donc le cosinus est nul, on pense à $\pi/2$, on vérifie qu'il est bien entre 0 et π, c'est donc bien la valeur cherchée : $\arccos(0) = \pi/2$.
   De même : $\arccos(1) = 0$, $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.
   Petite difficulté pour $-\sqrt{3}/2$: on sait que $\arccos(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Pour obtenir $-\sqrt{3}/2$ il suffit de faire sur le cercle une symétrie d'axe (Oy) soit prendre $\pi - \pi/3$ (faire un dessin !). Et donc $\arccos(-\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$.
   (remarque : en aucun cas cela ne pouvait etre $-\pi/3$, pour au moins 2 raisons : cet angle n'est pas entre 0 et π...et son cosinus ne vaut pas $-\sqrt{3}/2$ mais $+\sqrt{3}/2$)
   $\arccos(\cos(2\pi))$ ne vaut pas 2π...en effet, 2π est bien un angle dont le cosinus vaut $\cos(2\pi)$ évidemment...mais il n'est pas entre 0 et π. Il faut plutôt pour cela prendre 0, angle dont le cosinus vaut bien $\cos(2\pi)$ (c'est-à-dire 1) mais dans le bon intervalle.
   (e) que peut-on dire de $\arccos(\cos(x))$? Comme le montre le dernier exemple, $\arccos(\cos(x)$ ne vaut pas x, en général, mais seulement si x est entre 0 et π. Sinon, ce sera de la forme $x - k\pi$ où k est un entier tel que $x - k\pi$ soit dans le bon intervalle $[0, \pi]$.

6. Existence et valeur des extrema des fonctions : $a(x) = x(3-x)$, $b(x) = \frac{4x^2 - 3x - 1}{4x^2 + 1}$, $c(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $d(x) = \frac{1}{1+x^2}$

corrigé succinct : il est possible de traiter ces trois exercices par une étude complète de ces fonctions et tableau de variations, en utilisant les dérivées premières et seconde. Le corrigé qui suit propose des rédactions "minimales", ne donnant que les arguments strictement nécessaires.

a : a tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$, elle n'a donc pas de minimum global, et le maximum est atteint pour une valeur de x qui annule la dérivée $3 - 2x$. Comme la dérivée ne s'annule qu'en $x = 3/2$, $\boxed{\text{le maximum est atteint en } 3/2 \text{ et vaut } 9/4.}$

b : les limites de b en $+\infty$ et $-\infty$ valent 1. La dérivée s'annule pour $x = -3/2$ et $x = 1/6$, les valeurs correspondantes $5/4$ et $-5/4$ sont donc respectivement les maximum et minimum :

$$\boxed{\text{le maximum de } b \text{ vaut } 5/4\text{, atteint en } -3/2\text{; le minimum vaut } -5/4\text{, atteint en } 1/6.}$$

c : sans calcul... sin est compris entre -1 et 1, donc $\sqrt{1 + \sin x}$ est compris entre 0 et $\sqrt{2}$, et ces valeurs sont atteintes : en les $-\pi/2 + 2k\pi$ pour 0 et en les $\pi/2 + 2k\pi$ pour le $\sqrt{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{le minimum de } c \text{ est 0 et le maximum } \sqrt{2}.}$

d : x^2 varie entre 0 et $+\infty$, donc $\frac{1}{1+x^2}$ entre 1 et 0, la valeur 0 n'est pas atteinte (il n'y a pas de minimum), la valeur 1 est atteinte : 1 est la valeur maximale atteinte pour $x = 0$

exercices pratiques

1. **Corps noir :** l'émittance d'un corps noir de température T à la longueur d'onde λ vaut $\epsilon(\lambda, T) = \frac{a}{\lambda^5 \exp(\frac{b}{\lambda T})}$ avec $a = 3,7 \times 10^{-16}$kg.m^4.s^{-3} et $b = 1,44.10^{-2}$K.m.
   Montrer qu'à T fixé, l'émittance est maximale pour une certaine longueur d'onde que l'on déterminera en fonction de T.

corrigé succinct :

ϵ tend vers 0 en 0 comme en l'infini, donc admet un maximum.

On cherche plutôt le minimum de $1/\epsilon$, dont la dérivée par rapport à λ est $5\lambda^4 \exp(\frac{b}{\lambda T}) - b\lambda^3 \exp(\frac{b}{\lambda T})/T$, et donc s'annule si $\lambda = \frac{b}{5T}$.

2. **Optimisation :** un fabricant produit des boîtes de conserve cylindriques, de volume 1 litre. Quelles dimensions doit-il choisir pour utiliser le moins de métal possible ?

corrigé succinct : $1l = 1$ dm^3, donc si h et r sont la hauteur et le rayon de la boîte, exprimés en décimètres, ils vérifient la relation $\pi r^2 h = 1$.

La surface de métal nécessaire est donc $2\pi rh + 2\pi r^2$ (le corps de la boîte, le couvercle et le fond), que l'on peut exprimer en fonction de r uniquement, en remplaçant h par son expression en fonction de r : $S(r) = 2/r + 2\pi r^2$.

On voit que si r tend vers 0 ou vers l'infini, $S(r)$ tend vers l'infini. Le minimum de la fonction est donc donné par $S'(r) = 0$ soit $-2/r^2 + 4\pi r = 0$, soit encore $2\pi r^3 = 1$, et $r = (2\pi)^{-1/3}$.

Donc $h = (\frac{4}{\pi})^{1/3}$. A.N : $\boxed{r = 0.54 \text{ dm} = 5.4 \text{ cm}, h = 1.08 \text{ dm} = 10.8 \text{ cm}.}$

3. **Nombre de chiffres :** le plus grand nombre premier connu à ce jour est $2^{82\,589\,933} - 1$. Combien de chiffres sont nécessaires pour l'écrire ?

corrigé succinct :

Le nombre de chiffres n est caractérisé par la double inégalité $10^{n-1} \leq 2^{82\,589\,933} - 1 < 10^n$, soit encore $10^{n-1} < 2^{82\,589\,933} < 10^n$ (l'inégalité de droite est stricte car une puissance de 2 n'est pas divisible par 5, donc a fortiori ne peut être une puissance de 10).

Si l'on peut écrire $2^{82\,589\,933}$ sous la forme 10^x, le nombre de chiffre sera donc égal à la partie entière de x plus un.

On détermine alors x en prenant le logarithme népérien de cette égalité, soit $x = \ln 10 = 82\,589\,933 \ln 2$, donc $x = 82\,589\,933 \ln(2)/\ln 10 \simeq 24\,862\,048, ...$

Le nombre premier s'écrit donc avec 24 862 048 chiffres.