exercices théoriques

1. **calculer les intégrales :**

$$A=\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x, \qquad B=\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)},$$

$$C=\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}, \qquad D=\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}.$$

corrigé succinct :

pour le calcul de A :

partie entière : on effectue la division de x^2+1 par x^2+x : le quotient est 1 (et le reste, qui ne servira pas par la suite, vaut $-x+1$). Ce quotient 1 est la **partie entière** de la fraction.

factorisation du dénominateur : on constate que $x^2+x=x(x+1)$, c'est la factorisation sur $\mathbb{R}$ du dénominateur.

On en déduit que la décomposition en éléments simples de la fraction est $\frac{x^2+1}{x^2+x}=1+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1}$: on retrouve la partie entière et un élément simple pour chacun des facteurs du dénominateur (celui-ci vaut $x(x+1)$, donc x donne un élément simple $\frac{\alpha}{x}$ et $x+1$, un élément simple $\frac{\beta}{x+1}$).

Il reste à déterminer α et β...

détermination de α : on multplie par x ("ce qui est au dessous de α que l'on cherche") l'expression :

$\frac{(x^2+1)x}{x^2+x}=x+\frac{\alpha x}{x}+\frac{\beta x}{x+1}$

puis on simplifie les x/x :

$\frac{x^2+1}{x+1}=x+\frac{\alpha}{1}+\frac{\beta x}{x+1}$

puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par la valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x=0$:

$\frac{0^2+1}{0+1}=0+\frac{\alpha}{1}+\frac{\beta 0}{0+1}$

et ainsi on obtient simplement $\alpha=1$.

détermination de β : de même on multplie par $x+1$ ("ce qui est au dessous de β que l'on cherche") l'expression :

$\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+x}=(x+1)+\frac{\alpha(x+1)}{x}+\frac{\beta(x+1)}{x+1}$

puis on simplifie les $(x+1)/(x+1)$:

$\frac{x^2+1}{x}=(x+1)+\frac{\alpha(x+1)}{x}+\frac{\beta}{1}$

puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par la valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x+1=0$ soit $x=-1$:

$\frac{(-1)^2+1}{-1}=0+\frac{\alpha 0}{-1}+\frac{\beta}{1}$

et ainsi on obtient simplement $\beta=-2$.

calcul de l'intégrale : On a donc prouvé que $\frac{x^2+1}{x^2+x}=1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}$...ce qui permet de calculer l'intégrale car on a remplacé la fraction de départ (dont on ne connaît pas de primitive simple) par une somme de trois fonctions que l'on sait facilement intégrer : une constante et des inverses de fonctions affines :

$A=\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int_1^2 1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x=[x+\ln(x)-2\ln(x+1)]_1^2,$

donc $A=(2+\ln(2)-2\ln(3))-(1+\ln(1)-2\ln(2))$, et ainsi $\boxed{A=1+3\ln 2-2\ln 3.}$

pour le calcul de B :

partie entière : on effectue la division de $2x$ par $(x+1)(x^2+1)$: pour l'effectuer on doit développer le dénominateur, il vaut x^3+x^2+x+1. Mais comme il est de degré 3, alors que le numérateur est de degré 1 seulement, le quotient est nul...

factorisation du dénominateur : ici le dénominateur est déja factorisé dans l'énoncé, il n'y a rien à faire.

On en déduit que la décomposition en éléments simples de la fraction est $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}=0+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$: on retrouve la partie entière nulle, un élément simple $\alpha/(x+1)$ pour le facteur $x+1$ du dénominateur, et pour le facteur x^2+1 qui est de degré 2, un numérateur de degré 1 est à déterminer : l'élément simple sera de la forme $\frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}$).

Il reste à déterminer α d'une part, β et γ d'autre part...

détermination de α : on multplie par $x+1$ puis on simplifie les $(x+1)/(x+1)$:

$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{\alpha}{1}+\frac{(\beta x+\gamma)(x+1)}{x^2+1}$

puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par la valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x+1=0$, $x=-1$:

$\frac{-2}{(-1)^2+1}=\frac{\alpha}{1}+\frac{(\beta(-1)+\gamma)(0)}{(-1)^2+1}$

et ainsi on obtient simplement $\alpha=-2/2=-1$.

détermination de β et γ : de même on multplie par x^2+1 ("ce qui est au dessous de β que l'on cherche") l'expression puis on simplifie les $(x^2+1)/(x^2+1)$:

$\frac{2x}{x+1}=\frac{\alpha(x^2+1)}{x+1}+\frac{(\beta x+\gamma)}{1}$

puis enfin on remplace, dans l'égalité ci-dessus valable pour tout x, x par une valeur qui annule le dénominateur de départ, donc $x^2+1=0$ soit $x=i$ (on pourrait aussi utiliser $-i$ à la place, mais il n'est pas utile de faire deux fois le calcul) :

$\frac{2i}{i+1}=\frac{\alpha 0}{i+1}+\frac{\beta i+\gamma}{1}$,

soit $\beta i+\gamma=\frac{2i}{i+1}$.

Là on remarque que $\beta i+\gamma$ est la forme algébrique d'un nombre complexe !

On écrit $\frac{2i}{i+1}$ sous forme algébrique en multipliant par le conjugué du dénominateur, $-i+1$. On obtient :

$\beta i+\gamma=\frac{2i(-i+1)}{2}$ (le 2 au dénominateur est le carré du module du dénominateur initial),

donc $\beta i+\gamma=\frac{2+2i}{2}=1+i$,

et par identification, $\beta=1$ et $\gamma=1$.

calcul de l'intégrale : On a donc prouvé que $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}$ ...ce qui permet de calculer l'intégrale car on a remplacé la fraction de départ (dont on ne connaît pas de primitive simple) par une somme de trois fonctions que l'on sait facilement intégrer : $\frac{-1}{x+1}$, $\frac{1}{x^2+1}$ et $\frac{x}{x^2+1}$.

$$B = \int_0^1 \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

donc $B = [-\ln(x+1) + \arctan(x) + \ln(x^2+1)/2]_0^1$

et finalement $B = -\ln(2) + \arctan(1) + \ln(2)/2$, $\boxed{B = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.}$

Pour C on décompose en éléments simples la fraction, on obtient $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2})$, et donc $C = [(\ln x - \ln(x+2))/2]_1^{+\infty}$.

Chacun des deux logarithmes, séparément, à une limite infinie en $+\infty$, il est donc nécessaire de les regrouper pour lever l'indetermination : $C = [\ln \frac{x}{x+2}/2]_1^{+\infty}$.

La limite en l'infini de $\frac{x}{x+2}$ est 1, et donc le logarithme tend vers 0.

Ainsi $\boxed{C = \frac{\ln 3}{2}}$

De la même manière pour calculer D, on commence par décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$, ce qui permet de déterminer sa primitive $\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ et donc $D = [\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^{+\infty}$.

Pour lever l'indétermination en $+\infty$ on doit regrouper les logarithmes : $\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, et la limite en l'infini est alors la même que celle de $\ln \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \ln(x/x) = \ln(1)$, donc nulle.

Ainsi, $D = [\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^{+\infty} = 0 - (\ln(1) - \frac{1}{2}\ln(2))$, donc $\boxed{D = \frac{\ln 2}{2}.}$

2. Soit R le rectangle $[-1,1] \times [0,2]$. Calculer $\int\int_R x^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

corrigé succint :

$\int_{x=-1}^1 (\int_{y=0}^2 x^2 + 2xy\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^1 [x^2 y + xy^2]_0^2 \mathrm{d}x$ donc $\int_{x=-1}^1 2x^2 + 4x\mathrm{d}x = [2x^3/3 + 2x^2]_{-1}^1 = 4/3$.

3. Soit R_2 le rectangle $[0,1] \times [0,2]$. Calculer $\int\int_{R_2} \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

corrigé succint :

$\int_{x=0}^1 (\int_{y=0}^2 \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \times \int_{x=0}^2 y\mathrm{d}y$, soit $\arctan(1).2^2/2 = \pi/2$.

4. Soit D défini par $y \le 0 \le x$ et $x^2+y^2 \le 1$: reconnaître géométriquement D. Calculer $\int\int_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

corrigé succint : on passe en coordonnées polaires en prenant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. D est le quart de disque inférieur droit donc θ varie entre $-\pi/2$ et 0.

La condition donc on calcule $\int_{r=0}^1 \int_{\theta=-\pi/2}^0 r^2\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ soit $\int_{r=0}^1 r^3\mathrm{d}r \int_{\theta=-\pi/2}^0 (\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

L'intégrale en r vaut 1/4.

Pour calculer l'intégrale en θ on utilise $\cos\theta\,\sin\theta = \sin(2\theta)/2$ de primitive $-\cos(2\theta)/4$ donc d'intégrale $-1/2$.

Finalement on trouve que la valeur de l'intégrale est $-1/8$.

5. On considère une surface triangulaire de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$ et de masse surfacique σ constante.
Déterminer sa masse et son centre de masse G.

corrigé succint :

l'équation de (AB) est $y = x$, donc le triangle peut être décrit par les inéquations : $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

la surface du triangle est $S = \int\int_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ soit $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^1 x\mathrm{d}x = [x^2/2]_0^1 = 1/2$, et sa masse est $M = \sigma S = \sigma/2$.

la coordonnée x_G du centre de gravité $x_G = \int\int_T x\mathrm{d}x\mathrm{d}y/S = 2\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^1 x^2\mathrm{d}x = 2[x^3/3]_0^1 = 2/3$.

De même, la coordonnée $y_G = \int\int_T y\mathrm{d}x\mathrm{d}y/S = 2\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_{x=0}^1 x^2/2\mathrm{d}x = 1/3$.

bonus : calcul du moment d'inertie par rapport à G : il vaut

$I = \int\int_T \sigma((x-2/3)^2 + (y-1/3)^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, donc

$I = \sigma\int_{x=0}^1 x(x-2/3)^2 + (x-1/3)^3/3 - (-1/3)^3/3\mathrm{d}x =$

$\sigma\int_{x=0}^1 x(x-2/3)^2 + (x-1/3)^3/3 - (-1/3)^3/3\mathrm{d}x$,

$I = \sigma\int_{x=0}^1 x(x^2 - 4/3x + 4/9) + (x^3 - x^2 + x/3)/3\mathrm{d}x$,

$I = \sigma\int_{x=0}^1 4/3x^3 - 5/3x^2 + 5x/9\mathrm{d}x = \sigma\,[x^4/3 - 5x^3/9 + 5x^2/18]_0^1 = \sigma/18$.

6. (*) L'objectif de l'exercice est de calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, fondamentale en probabilités, statistiques, métrologie...
On note R un réel positif puis
— C_R le carré $[-R,R] \times [-R,R]$,
— D_R^1 le disque de centre O et rayon R,
— D_R^2 le disque de centre O et rayon $\sqrt{2}R$.
On note $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

(a) Expliquer pourquoi $\int\int_{D_R^1} f\ \mathrm{d}^2S \le \int\int_{C_R} f\ \mathrm{d}^2S \le \int\int_{D_R^2} f\ \mathrm{d}^2S$.

(b) En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\int\int_{D_R^1} f \, \mathrm{d}^2S$

(c) Calculer de même $\int\int_{D_R^2} f \, \mathrm{d}^2S$

(d) Calculer $\int\int_{C_R} f\mathrm{d}^2S$ en fonction de $\int_{-R}^{R} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

(e) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

corrigé succinct :

(a) La fonction est positive et les domaines d'intégration sont inclus les uns dans les autres ($D_R^1 \subset C_R \subset D_R^2$) donc les intégrales (que l'on peut interpréter comme des volumes d'ensembles eux aussi inclus les uns dans les autres) vérifient bien l'inégalité demandée.

(b) $\int\int_{D_R^1} f \, \mathrm{d}^2S = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_{r=0}^{R} re^{-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi \times [-e^{-r^2}/2]_0^R = \pi(1-e^{-R^2})$

(c) On trouve de même $\pi(1-e^{-2R^2})$

(d) $\int\int_{C_R} f\mathrm{d}^2S = \int_{x=-R}^{R}\int_{y=-R}^{R} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x \times \int_{y=-R}^{R} e^{-y^2}\mathrm{d}y = (\int_{-R}^{R} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x)^2$ (les variables sont "muettes" dans ces intégrales : que la variable utilisée soit x ou y, les valeurs des intégrales sont identiques)

(e) D'après les questions précédentes, on a $\pi(1-e^{-R^2}) \leq (\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x) \leq \pi(1-e^{-2R^2})$, donc en passant à la limite pour R tendant vers l'infini, $\pi \leq (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x) \leq \pi$ et donc l'intégrale (qui est positive) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ vaut $\sqrt{\pi}$.

exercices pratiques

7. Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre d'une règle plate de dimensions a et L

corrigé succinct :

l'aide du rectangle est aL et sa masse est $M = \sigma aL$ où σ est la masse surfacique.

on peut choisir par exemple de placer le repère au centre de la règle ou bien sur les bords gauche (axe vertical) et bas (axe horizontal).

si on choisit un repère sur els bords de la règle, la règle correspond au rectangle $[0, L] \times [0, a]$ et les coordonnées du centre G sont $(L/2, a/2)$. Le moment d'inertie I est l'intégrale de $\sigma d^2(M, G)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma((x - L/2)^2 + (y - a/2)^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Alors $I = \int_{x=0}^{L}\int_{y=0}^{a} \sigma((x - L/2)^2 + (y - a/2)^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sigma\int_{x=0}^{L}(\int_{y=0}^{a} \sigma((x - L/2)^2 + (y - a/2)^2) \, \mathrm{d}y)\mathrm{d}x$, donc $I = \sigma\int_{x=0}^{L} a(x - L/2)^2 + 2(a/2)^3/3\mathrm{d}x = \sigma\int_{x=0}^{L} a(x - L/2)^2 + a^3/12\mathrm{d}x = 2a(L/2)^3/3 + a^3L/12$ soit finalement $I = \sigma(a^3L + aL^3)/12 = M(a^2 + L^2)/12$.

8. En utilisant des **coordonnées cylindriques** on peut exprimer le moment d'inertie d'un cylindre C de masse volumique ρ constante par rapport à un axe Δ par la formule

$$\int\int\int_C \rho \, d^2(M, \Delta) \, \mathrm{dV}$$

où :

- $d(M, \Delta)$ est la distance d'un point M à la droite Δ, que l'on exprimera à l'aide des coordonnées cylindriques r, θ, z (ce sont les coordonnées polaires et z).

- dV est l'élément de volume qui s'exprime en coordonnées cylindriques par $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

- les bornes de l'intégrale pour décrire le cylindre sont r entre 0 et R (rayon du cylindre), θ entre 0 et 2π, z entre 0 et L.

Déterminer les moments d'inertie :

(a) I_0 d'un cylindre de masse M, rayon R, longueur L, par rapport à son axe de symétrie.

(b) I_d d'un cylindre de masse M, rayon R, longueur L, par rapport à un axe parallèle à son axe de symétrie et situé à la distance d de celui-ci.

(c) (*) I_p d'un cylindre de masse M, rayon R, longueur L, par rapport à un axe perpendiculaire à son axe de symétrie et passant par le centre de masse du cylindre.

corrigé succinct :

On note ρ la masse volumique du cylindre, on a $M = \rho\pi R^2L$.

On choisit un repère de coordonnées cylindre d'axe (Oz) l'axe du cylindre, de plan (xOy) une des faces du cylindre. Le cylindre est ainsi décrit par $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq L$.

(a) $I_0 = \int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = 2\pi\rho R^4L/4 = \pi\rho R^4L/2 = MR^2/2$

(b) on peut supposer que l'axe par rapport auquel on calcule le moment a pour équation $x = d$, $y = 0$, z quelconque.
Ainsi $I_d = \int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}((x - d)^2 + y^2)\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}((r\cos\theta - d)^2 + (r\sin\theta)^2)\rho r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^2 - 2dr\cos\theta + d^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^3 - 2dr^2\cos\theta + d^2r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
Cette intégrale se sépare en 3 :
$I_d = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z + \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} -2dr^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z + \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} d^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
La première intégrale est I_0, la deuxième intégrale vaut 0 (on intègre un cosinus sur une période), la troisième vaut d^2M.
Ainsi, $I_d = I_0 + Md^2$.

(c) On peut suppose que l'axe D par rapport auquel on fait le calcul est l'axe $x = 0$, $z = L/2$. Alors la distance au carré entre un point M de coordonnées cylindrique r, θ, z (donc de coordonnées cartésiennes $r\cos\theta$, $r\sin\theta$, z) et l'axe D est $x^2 + (z - L/2)^2$.
I_p vaut donc $I_p = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(r^2\cos^2\theta + (z - L/2)^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, donc $I_p = \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z + \rho\int_{z=0}^{L}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}(z - L/2)^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
L'intégrale pour θ entre 0 et 2π de $\cos^2\theta$ vaut π (voir S1 : linéariser...), et ainsi :
$I_p = R^4/4\times\pi\times L + R^2/2\times 2\pi\times[(z-L/2)^3/3]_{z=0}^{z=L}$ et donc $I_p = \pi LR^4/4 + \pi R^2H^3/12$.
Finalement, on voit que $I_p = MR^2/4 + ML^2/12$.

9. (*) En utilisant des coordonnées cylindriques calculer le volume et la masse d'un cône (droit) de rayon R, de hauteur H et de masse volumique constante ρ.

corrigé succint :

(a) on fixe un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que :
- l'axe (Oz) est l'axe du cône,
- la base du cône est située dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
- le sommet a pour coordonnées cartésiennes $(0, 0, H)$.
puis on considère alors les coordonnées cylindriques associées.

(b) Le cône est alors l'ensemble des points dont les coordonnées (r, θ, z) vérifient les trois conditions :
$\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, H]$, $r \in [0, \dfrac{R(H-z)}{H}]$.
Remarques : 1) la troisième condition exprime le fait que, pour une côte z donnée, le rayon de la section du cône par un plan horizontal est un cercle de rayon variable (qui dépend de z).
2) on peut bien sûr choisir de fixer d'abord r entre 0 et R, puis z entre 0 et une borne qui dépend de r.
3) l'ensemble de points dont les coordonnées vérifient $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, H]$, $r \in [0, R]$ est un **cylindre** et non un cône.

(c) Le volume du cône est alors $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{\frac{R(H-z)}{H}} r\,dr\,dz\,d\theta$, qui se calcule par étapes successives :
$\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\frac{R^2(H-z)^2}{2H^2}\,dz\,d\theta$,
$\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}[-\frac{R^2(H-z)^3}{6H^2}]_0^H\,d\theta$,
$2\pi\dfrac{R^2H^3}{6H^2}$, soit $\pi R^2H/3$.
Et la masse du cône est $M = \rho V = \pi\rho R^2H/3$.

(d) **bonus :** calcul du moment d'inertie du cône par rapport à son axe. La méthode est la même : l'intégrale est celle de $r^2dm = r^2\rho dV$, soit $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{\frac{R(H-z)}{H}} r^3\rho\,dr\,dz\,d\theta$, et la même technique donne comme valeur $\dfrac{\pi\rho R^4H}{10}$.
En utilisant la valeur de la masse, on trouve $3MR^2/10$.
(remarque : ce n'est pas le tiers du moment d'inertie du cylindre correspondant ! !)