exercices théoriques

1. Résoudre les systèmes

$$(S_1) : \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}, \qquad (S_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4 \\ 4x - y + z = 5 \\ 6x - 4y + z = -1 \end{cases},$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ 3x - y + z = 6 \\ 4x + 3y - z = -7 \end{cases}, \qquad (S_4) : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - 3y + z = 4 \\ 4x - 5y + z = 10 \end{cases}.$$

corrigé succint :

pour (S_1) on ne trouve pas de solution.

pour (S_2) $x = 9/5$, $y = 16/5$, $z = 1$.

Le système S_3 équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \ \ (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 3x - y + z = 6 \\ 7x + 2y = -1 \ \ (L_3 \leftarrow L_1 + L_3) \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 3x - y + z = 6 \\ 2x = -2 \ \ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

d'où l'on déduit par la ligne 3 : $x = -1$, puis avec la ligne 1 : $y = 3$, puis avec la ligne 2 : $z = 12$.

Le système S_4 équivaut à :

$$\begin{cases} 7y - 3z = -6 \ \ (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ x - 3y + z = 4 \\ 7y - 3z = -6 \ \ (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2) \end{cases}$$

On constate que les premières et dernière ligne sont identiques. Alors :

$$\begin{cases} y = (3z - 6)/7 \\ x = 3y - z + 4 = (9z - 18 - 7z + 28)/7 = 2z/7 + 10/7 \end{cases}$$

et ainsi on obtient un système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 2z/7 + 10/7 \\ y = 3z/7 - 6/7 \\ z = z \end{cases}$$

qui représente la droite de vecteur directeur $(2, 3, 7)$ et passant par le point $(10/7, -6/7, 0)$.

2. Calculer, si c'est possible, $A + B$ et AB :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

corrigé succint :

(a) On ne peut calculer $A + B$, et le produit AB vaut $AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) On ne peut calculer ni $A + B$, ni AB (le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B).

(c) On calcule $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AB = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - A - 2I = 0$.

(b) En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

(c) Résoudre les équations $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AY = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(d) On pose $P(X) = X^2 - X - 2$. Déterminer le reste de la division de X^5 par P, et en déduire l'expression de A^5.

corrigé succint :

(a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -18 & -17 & 9 \\ -30 & -30 & 16 \end{pmatrix}$ et donc $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$.

(b) On a donc $\dfrac{A^2-A}{2}=I$, donc $A\dfrac{A-I}{2}=\dfrac{A-I}{2}A=I$, l'inverse de A est la matrice $\dfrac{A-I}{2}$, que l'on calcule directement : $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&-3/2\\-9&-10&9/2\\-15&-15&13/2\end{pmatrix}$.

(c) A est inversible donc $AX=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ équivaut à $A^{-1}AX=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $IX=X=\begin{pmatrix}7/2\\-29/2\\-47/2\end{pmatrix}$. De même, $AY=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$ équivaut à $Y=A^{-1}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$, soit $Y=\begin{pmatrix}-7\\26\\41\end{pmatrix}$.

(d) On calcule un quotient X^3+X^2+3X+5 et un reste $11X+10$. Par conséquent, $X^5=(X^2-X-2)(X^3+X^2+3X+5)+11X+10$, et on peut évaluer cette égalité en A, pour obtenir $A^5=(A^2-A-2I)(A^3+A^2+3A+5I)+11A+10I$.
Comme $A^2-A-2I=0$, on en déduit que $A^5=11A+10$, soit $A^5=\begin{pmatrix}65&66&-33\\-198&-199&99\\-330&-330&164\end{pmatrix}$.

4. On fixe un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct, et $\vec{\omega}(\alpha,\beta,\gamma)$.
Vérifier que $\vec{f}:\vec{u}\mapsto\vec{u}\wedge\vec{\omega}$ est linéaire, et déterminer sa matrice.

On a bien, pour tout réel λ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les égalités $(\lambda\vec{u})\wedge\vec{\omega}=\lambda(\vec{u}\wedge\vec{\omega})$, et $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{\omega}=\vec{u}\wedge\vec{\omega}+\vec{v}\wedge\vec{\omega}$, donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.

Pour déterminer sa matrice dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, il suffit de calculer en fonction de $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ l'image de $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$. On calcule donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\gamma\\\beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix}$.

La matrice est donc $\begin{pmatrix}0&\gamma&-\beta\\-\gamma&0&\alpha\\\beta&-\alpha&0\end{pmatrix}$, elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

5. (*) On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n) qui au polynôme $P(X)$ associe le polynôme $XP'(X)$ (par exemple, l'image du polynôme $2X^2+X-1$ est $X(4X+1)$ soit $4X^2+X$).
Montrer que l'application est linéaire, déterminer son noyau (l'ensemble des polynômes dont l'image est nulle), son image (l'ensemble des polynômes qui peuvent s'écrire $XP'(X)$) et sa matrice dans la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$.

corrigé succint :
Elle est linéaire car $X(aP+bQ)'=aXP'+bXQ'$.
Si $XP'=0$, $P'=0$ donc P est constant : le noyau est l'ensemble des polynômes constants.
Pour l'image : un polynôme Q de l'image doit être divisible par X donc vérifie $Q(0)=0$.
Réciproquement si $Q(0)=0$, $Q(X)/X$ est un polynôme de degré $n-1$, il admet donc une primitive P, et on a bien $XP'=Q$.

6. Inverser :
$$A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\-1&1&1\\2&3&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&1&3\\-1&2&0\\0&-1&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&-3&-8\\5&1&6\\3&2&7\end{pmatrix}.$$

corrigé succint : On peut résoudre le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, c'est-à-dire exprimer x,y,z en fonction de x',y',z' : les coefficients utilisés sont ceux de A^{-1}.
Ou bien utiliser la méthode détaillée en cours : on place A et I_3 côte-à-côte :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-5&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\2&3&3&0&0&1\end{array}\right)$$
et on réalise des opérations **sur les lignes** (uniquement, pas les colonnes) qui permettent de transformer A en I. On se retrouve alors, du côté droit de l'expression, avec la matrice A^{-1}.
Ici on peut commencer par ajouter L_1 à L_2 et $-2L1$ à L_3 pour faire apparaître deux zéros sur la première colonne :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-5&1&0&0\\0&3&-4&1&1&0\\0&-1&13&-2&0&1\end{array}\right)$$
Puis on ajoute $3L_3$ à L_2, et **ensuite** on change tous les signes de la ligne L_3 :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-5&1&0&0\\0&0&35&-5&1&3\\0&1&-13&2&0&-1\end{array}\right)$$
Puis on échange juste L_2 et L_3 :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-5&1&0&0\\0&1&-13&2&0&-1\\0&0&35&-5&1&3\end{array}\right)$$
puis on divise L_3 par 35 et **ensuite** on ajoute $13L_3$ à L_2 :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-5&1&0&0\\0&1&0&5/35&13/35&4/35\\0&0&1&-5/35&1/35&3/35\end{array}\right)$$
pour terminer, on ajoute $-2L_2+5L_3$ à la ligne L_1 :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-21/35&7/35\\0&1&0&5/35&13/35&4/35\\0&0&1&-5/35&1/35&3/35\end{array}\right)$$
On trouve donc, en sortant le coefficient $1/35$:
$$A^{-1}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}0&-21&7\\5&13&4\\-5&1&3\end{pmatrix}$$

Par la même méthode, on obtient $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

et $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 \\ -17 & 10 & -28 \\ 7 & -5 & 13 \end{pmatrix}$

exercices pratiques

1. (*) **matrices et optique**
   Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on modélise la propagation d'un rayon par un vecteur $\begin{pmatrix} h \\ \nu i \end{pmatrix}$ où h est la hauteur (mesurée verticalement depuis l'axe optique), i l'angle qu'il fait avec l'horizontale et ν un nombre qui est égal à l'indice n du milieu si le rayon se propage dans le sens normal (de gauche à droite), $-n$ sinon.
   Un système optique (composé de lentilles, miroirs, etc.) est modélisé par une matrice M de taille 2×2 de sorte que l'on ait $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$ le rayon entrant dans le système et $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix}$ le rayon sortant du système.
   Quand un système est composé de plusieurs éléments, sa matrice est obtenue en multipliant les matrices des éléments qui le composent, en indiquant de droite à gauche les matrices des éléments successivement rencontrés.

   (a) montrer que la matrice d'une zone transparente de longueur D est $\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que la matrice d'un miroir sphérique de rayon R est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$, que la matrice d'un miroir plan est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) en déduire que la matrice d'une cavité laser constituée d'un miroir plan et d'un miroir sphérique concave séparés d'une distance D est $\begin{pmatrix} 1-2D/R & 2D(1-D/R) \\ -2/R & 1-2D/R \end{pmatrix}$

   (a)

   (b) Dans la cavité un rayon parcourt une distance d, est réfléchi par le miroir sphérique, parcourt une distance d, est réfléchi par le miroir plan. Il suffit donc de calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$