TD 3 : Développements limités - corrigé

exercices théoriques

1. Donner les développements limités des expressions suivantes :

(a) $\sqrt{1-2x}$ en 0 à l'ordre 3 (b) $\dfrac{1}{2-x}$ en 0 à l'ordre 4

(c) $3\ \sin 2x - 2\ \sin 3x$ en 0 à l'ordre 3 (d) $\dfrac{1}{3+2x^2}$ en 0 à l'ordre 6

(e) $\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{1-x^2+x^4}$ en 0 à l'ordre 3 (f) $\dfrac{1}{2-x}$ en 1 à l'ordre 4

(g) $\sin(x)$ à l'ordre 3 en $\pi/4$

corrigé succinct : (a) $\sqrt{1-2x} = (1-2x)^{1/2}$.
On utilise le développement limité de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/2$, soit
$$1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)/2x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + ... = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 + ...$$
On peut ensuite, comme x tend vers 0 (on cherche un développement limité en 0) et donc $-2x$ aussi, remplacer le x de cette formule de cours par $-2x$, et on obtient donc $\sqrt{1-2x} = 1 + (-2x)/2 - (-2x)^2/8 + (-2x)^3/16 + ...$, soit enfin :
$$\boxed{\sqrt{1-2x} = 1 - x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + ...}$$
(b) On peut se ramener au développement limité d'ordre 4 en 0 de
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + ...,$$
en factorisant un 2 au dénominateur et en remplaçant x par $-x/2$:
$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-x/2}, \text{ donc}$$
$$\frac{1}{2-x} = \tfrac{1}{2}(1 - \frac{-x}{2} + (\frac{-x}{2})^2 - (\frac{-x}{2})^3 + (\frac{-x}{2})^4 + ...$$
Après simplification, $$\boxed{\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{32}x^4 + ...}$$
(c) Il suffit d'utiliser deux fois le développement de sin à l'ordre 3 en 0, soit $\sin(x) = x - x^3/6 + ...$ pour trouver, en remplaçant x par $2x$ ou pas $3x$:
$$\boxed{3\ \sin 2x - 2\ \sin 3x = 5x^3 + ...}$$
(d) **Première méthode :** comme au b), on peut factoriser 3 au numérateur
$$\frac{1}{3+2x^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+2x^2/3},$$
puis utiliser le développement d'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+x}$ en remplaçant x par $2x^2/3$ (ce qui permet de "doubler" l'ordre du DL),
on obtient un développement limité d'ordre 6 en x, donc l'expression est après simplification
$$\boxed{\frac{1}{3+2x^2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{27}x^4 - \frac{8}{81}x^6 + ...}$$

Deuxième méthode : on pose la division selon les puissances croissantes de 1 par $3+2x^2$, à l'ordre 6 (on s'arrête quand le reste est de degré 7 ou plus ; et en fait on peut ne pas écrire dans l'opération de division les termes de degré 7 ou plus)

$$\begin{array}{l|l}
1 & 3 + 2x^2 \\ \cline{2-2}
1 + 2x^2/3 & 1/3 \quad -2x^2/9 \quad +4x^4/27 \quad -8x^6/81 \\ \cline{1-1}
\quad 2x^3/3 & \\
\quad - (2x^3/3 - 4x^4/9) & \\ \cline{1-1}
\quad\quad 4x^4/9 & \\
\quad\quad - (4x^4/9 + 8x^6/27) & \\ \cline{1-1}
\quad\quad\quad - 8x^6/27 & \\
\quad\quad\quad - 8x^6/27 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad\quad ... &
\end{array}$$

(e) **Première méthode :** on pourrait multiplier le numérateur par le développement limité de $\dfrac{1}{1-x^2+x^4}$ obtenu à l'aide du développement de $\dfrac{1}{1+x}$ en remplaçant x par $-x^2+x^4$ (c'est long) ou seulement par $-x^2$ car on veut un DL d'ordre 3, on peut négliger les termes en x^4...
Deuxième méthode : ou bien, effectuer la division selon les puissances croissantes à l'ordre 3, en supprimant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 4, qui ne nous intéressent pas dans le cadre d'un DL d'ordre 3.

Et sans oublier d'écrire dans l'ordre des puissances croissantes le numérateur.

Donc :
$1 - 3x + 2x^2 + x^3 = (1-x^2)(1 - 3x + 3x^2 - 2x^3) + ...$, et le développement limité cherché est ainsi
$$\boxed{\frac{x^3+2x^2-3x+1}{1-x^2+x^4} = 1 - 3x + 3x^2 - 2x^3 + ...}$$
(f) Attention ici, on cherche un développement limité en 1, autrement dit on cherche à approcher $\dfrac{1}{2-x}$ au voisinage de 1 par un polynôme de degré 4 en $(x-1)$:
pour cela on écrit $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{1-(x-1)}$, et on utilise le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ en remplaçant x par $-(x-1)$ (c'est possible car si x tend vers 1, $-(x-1)$ tend vers 0 et on peut utiliser le DL en 0 du cours) :

ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{2-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + (x-1)^4 + \ldots.}$

C'est bien le principe d'un DL d'écrire des termes de plus en plus petits de gauche à droite : la constante 1, puis $x-1$ qui tend vers 0 si x tend vers 1, puis $(x-1)^2$ qui tend vers 0 plus rapidement, etc.

Il ne faut surtout pas développer ici, pour garder cet ordonnancement des termes du plus petit au plus grand.

(g) Pour un DL en $\pi/4$, on écrit $x = (x-\pi/4) + \pi/4$, qui permet de faire apparaître le terme $x - \pi/4$ qui tend vers 0 en $\pi/4$, et par lequel on remplacera les "x" des DL en 0 du cours.

On peut alors écrire $\sin((x-\pi/4)+\pi/4) = \sin(x-\pi/4)\cos(\pi/4) + \cos(x-\pi/4)\sin(\pi/4)$ (formule d'addition),

puis les DL d'ordre 3 de sinus et cosinus :

$\sin((x-\pi/4)+\pi/4) =$
$((x-\pi/4) - (x-\pi/4)^3/6 + \ldots)\cos(\pi/4) + (1 - (x-\pi/4)^2/2 + \ldots)\sin(\pi/4)$.

Finalement, en $\pi/4$, $\boxed{\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + (x-\pi/4) - (x-\pi/4)^2/2 - (x-\pi/4)^3/6 + \ldots)}$

2. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^3}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{\arctan(x^2)}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \sin(x/2)}{x^2}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$

<u>corrigé succinct :</u>

(a) Au voisinage de 0, $\cos(x) = 1 - x^2/2 + ..$, donc $\dfrac{\cos(x)-1}{x^3} = -\dfrac{1}{2x} + ..$: $\boxed{\text{la limite est } -\infty \text{ en } 0^+, +\infty \text{ en } 0^-}$.

(b) On peut commencer par exprimer la différence en réduisant les fractions au même dénominateur pour se ramener à une forme indéterminée du type "0/0" : $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \sin x}{x \sin x}$.

On peut alors écrire un développement limité du dénominateur et du numérateur avec un terme non nul : $x - \sin x = x^3/6 + \ldots$ et $x \sin x = x^2 + \ldots$ (en haut on effectue du DL d'ordre 3 de sinus, en bas un développement d'ordre 1 suffit),

donc $\dfrac{x-\sin x}{x \sin x} = x/6 + \ldots$, et ainsi $\boxed{\text{la limite est nulle.}}$

(c) Pour lever l'indétermination du type "0/0", il faut effectuer des développements limités du numérateur et du dénominateur ayant chacun un terme principal non nul (au moins). On peut ainsi, pour le dénominateur, écrire $\cos(2x) - 1 = (1 - (2x)^2/2 + \ldots) - 1 = -4x^2/2 + \ldots$ et $\arctan(x^2) = x^2 + ..$ (inutile d'écrire plus de termes, un terme non nul suffit).

Le quotient est donc de la forme $\dfrac{-4x^2/2 + \ldots}{x^2 + ..} = \dfrac{-2 + \ldots}{1 + \ldots}$, et $\boxed{\text{la limite en 0 est } -2.}$

(d) Un développement limité d'ordre 2 du numérateur suffira, le dénominateur étant déjà un polynôme. Or $\sqrt{1+x} - 1 = x/2 - x^2/8 + \ldots$ et $-\sin(x/2) = -x/2 + \ldots$,

donc $\boxed{\text{la limite cherchée est } -1/8.}$

(e) On peut additionner les fractions et faire un développement limité des numérateurs et dénominateurs.

On peut aussi procéder ainsi avec un DL d'ordre 4 (et non 3) du numérateur : $\sin^2(x) = (x - \dfrac{1}{6}x^3 + \ldots)^2 = x^2 - \dfrac{1}{3}x^4 + \ldots$, donc $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + \ldots} - 1\right) = \dfrac{1}{x^2}((1 + \frac{1}{3}x^2 + \ldots) - 1) = \dfrac{1}{3} + \ldots$, $\boxed{\text{la limite cherchée est donc } 1/3.}$

3. Donner un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$a(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \sin\frac{1}{x}$, $\quad b(x) = xe^{3/x^2} - x$, $\quad c(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$.

<u>corrigé succinct :</u>

Pour chercher des équivalents simples, on peut utiliser des développements limités, à un ordre qui permet de garder un terme non nul à la fin.

Par exemple, pour $a(x)$, on peut utiliser des DL d'ordre 2 de ln et de sin, en remplaçant le x des formules de cours par $1/x$ qui tend bien, ici, vers 0, quand x tend vers l'infini.

Donc $a(x) = (1/x - \dfrac{(1/x)^2}{2} + \ldots) - (1/x + \ldots) = -\dfrac{1}{2x^2} + \ldots$, donc l'équivalent est

$$\boxed{a(x) \sim -\frac{1}{2x^2}}$$

Pour $b(x)$ de même : si x tend vers l'infini, $1/x$ tend vers 0 et on peut écrire $\exp(3/x^2) = 1 + 3/x^2 + \ldots$, donc $x\exp(3/x^2) = x + 3/x + \ldots$ donc $b(x) = 3/x + \ldots$ équivaut à $3/x$.

Pour $c(x)$ on veut utiliser un développement limité de la racine, mais on doit mettre l'expression sous la forme $\sqrt{1+u}$ avec u qui tend vers 0 pour se ramener à la formule connue.

Ainsi, on factorise x^2 sous la racine :

$c(x) = x\sqrt{1 - 1/x} - x = x(1 - \dfrac{1}{2x} + \ldots) - x = -\dfrac{1}{2} + \ldots$, et donc $\boxed{c(x) \sim -\dfrac{1}{2}}$. Quand une expression a une limite non nulle, cette limite est l'équivalent cherché.

4. Donner, en précisant leur position relative, les asymptotes aux courbes :

$C_1 : y = x^3 \cos\dfrac{1}{x} - x^3$ $\quad C_2 : y = \dfrac{1 - 3x^2}{3 - 2x}$ $\quad C_3 : y = \sqrt{2x^2 - x + 1}$

<u>corrigé succinct :</u>

L'objectif est d'obtenir un développement en l'infini du type :

$y = ax + b +$ un terme qui tend vers 0.

Alors $y = ax + b$ est l'équation de la droite asymptote, et le signe du terme supplémentaire permet de savoir si la courbe se trouve au dessus ou au dessous de l'asymptote.

C_1 : en écrivant un développement limité d'ordre 4 en 0 de $\cos x$ puis en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ (qui tend vers 0 ici, si x tend vers l'infini) on obtient

$$x^3 \cos \frac{1}{x} - x^3 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{24x} + ...$$

Si on considère la droite D d'équation $y = -\frac{x}{2}$, la différence entre l'ordonnée du point de C_1 et l'ordonnée du point de D d'abscisse x est $\frac{1}{24x} + ...$ qui tend vers 0, donc

$\boxed{y = -\frac{x}{2} \text{ est asymptote}}$.

Et de plus, $\frac{1}{24x} + ...$ est positif pour x tendant vers $+\infty$: l'asymptote est située au dessous de C_1 en $+\infty$.

De même, $\frac{1}{24x} + ...$ est négatif en $-\infty$ donc l'asymptote est en dessous de C_1 en $-\infty$.

C_2 : pour pouvoir utiliser les calculs usuels de développements limités, on commence par faire apparaître des $1/x$ en factorisant x^2 au dénominateur et x au numérateur :

$$\begin{aligned}
\frac{1-3x^2}{3-2x} &= \frac{-3x^2}{-2x} \times \frac{1-1/(3x^2)}{1-3/(2x)} \\
&= \frac{3x}{2}\left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{23}{12x^2} + ...\right) \\
&\quad \text{(par division selon les puissances croissantes)} \\
\frac{1-3x^2}{3-2x} &= \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} + \frac{23}{8x} + ...
\end{aligned}$$

donc la droite d'équation $y = \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}$ est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$, située au dessous de C_2 en $+\infty$, au dessus en $-\infty$.

(de plus, on a évidemment une asymptote verticale pour $x = 3/2$)

remarque : on peut aussi procéder directement par une division euclidienne "classique" :

$\dfrac{3x^2-1}{2x-3} = 3x/2 + 9/4 + \dfrac{23/4}{2x-3}$ (sans reste, c'est une égalité ici) qui donne bien l'asymptote ainsi que la position relative.

C_3 : on factorise $2x^2$ pour se ramener au développement limité de la racine de "1 plus quelque chose qui tend vers 0" (c'est à dire le DL vu en cours $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + ...$ en 0).

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2 - x + 1} &= \sqrt{2x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}} \\
&= \sqrt{2x^2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right)^2 + ...\right) \\
&= \sqrt{2x^2}\left(\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}\right) - \frac{1}{8}\frac{1}{4x^2} + ...\right) \\
&\quad \text{(on ne garde pas les termes en } 1/x^3 \text{ et } 1/x^4 \text{ car on fait un DL d'ordre 2)} \\
\sqrt{2x^2 - x + 1} &= \sqrt{2x^2}\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{7}{32x^2} + ...\right)
\end{aligned}$$

Donc si x tend vers $+\infty$, $y = \sqrt{2}(x - \frac{1}{4}) + \frac{7\sqrt{2}}{32x} + ...$).

$\boxed{\text{La droite d'équation } y = \sqrt{2}(x - \tfrac{1}{4}) \text{ est donc asymptote en } +\infty}$, et

$\boxed{C_3 \text{ est située au dessus de son asymptote}}$ (car le terme $\frac{7\sqrt{2}}{32x}$ est positif quand x tend vers l'infini).

De même si x tend vers $-\infty$, $y = -\sqrt{2}(x - \frac{1}{4}) - \frac{7\sqrt{2}}{32x} + ...$).

La droite d'équation $y = -\sqrt{2}(x - \frac{1}{4})$ est asymptote, et C_3 est située au dessus de son asymptote (car $-\frac{7\sqrt{2}}{32x}$ est positif si x tend vers $-\infty$).

exercices pratiques

1. **Circuit RLC parallèle :** exprimer le module de l'impédance complexe d'un circuit R, L, C parallèle.
   Donner un équivalent quand ω tend vers l'infini.

corrigé succinct : On a $1/Z = 1/R + jC\omega + 1/(jL\omega) = 1/R + j(C\omega - 1/(L\omega))$,

donc $Z = \dfrac{1}{1/R + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$, et donc $|Z| = \dfrac{1}{\sqrt{(1/R)^2 + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}$.

Si ω tend vers $+\infty$, l'expression tend vers 0 : il y a une asymptote horizontale.

On peut souhaiter être plus précis dans l'étude en $+\infty$ et rechercher un équivalent à l'expression : au dénominateur le terme $1/R$ est constant, le terme en $C\omega$ tend vers $+\infty$ et le terme $\frac{1}{L\omega}$ tend vers 0, donc finalement $|Z|$ est équivalent à $\frac{1}{C\omega}$: il s'agit de l'équation d'une hyperbole, qui représente une approximation plus précise que "0" (asymptote horizontale) de l'impédance en haute-fréquence.

2. **Circuit RLC série :**
   exprimer le module de l'impédance complexe d'un circuit R, L, C série.
   Donner un équivalent quand ω tend vers l'infini.

corrigé succinct : On a $Z = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$, et donc

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \tfrac{1}{C\omega})^2}.$$

Si ω tend vers l'infini, on constate que $|Z|$ tend vers l'infini, et en ne gardant que le terme dominant dans l'expression, que $|Z| \sim L\omega$.

On peut souhaiter être plus précis dans l'approximation, en utilisant pour cela un développement limité. On commence par développer l'expression sous la racine :

$$|Z| = \sqrt{(L\omega)^2 + R^2 - 2\frac{L}{C} + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

puis on factorise le terme prépondérant $(L\omega)^2$:

$$|Z| = L\omega\sqrt{1 + \frac{R^2 - 2\frac{L}{C}}{L^2\omega^2} + \frac{1}{L^2C^2\omega^4}}$$

Si on négliger le terme en $1/\omega^4$:

$$|Z| = L\omega\sqrt{1 + \frac{R^2 - 2\frac{L}{C}}{L^2\omega^2} + ...}$$

et avec un DL d'ordre 1 de la racine :

$$|Z| = L\omega\left(1 + \frac{R^2 - 2\frac{L}{C}}{2L^2\omega^2} + ...\right)$$

donc

$$|Z| = L\omega + \frac{R^2 - 2\frac{L}{C}}{2L\omega} + ...$$

On voit donc que la droite $y = L\omega$ est asymptote à $|Z|$, et que la position relative dépend du signe de $R^2 - 2\frac{L}{C}$: la courbe est au dessus de l'asymptote si ce terme est positif, en dessous sinon.