exercices théoriques

1. **révision des techniques générales**

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\mathbb{R}_+} \dfrac{x}{1+x^4} \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{1/2} \dfrac{x}{1-x^4} \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+e^{ax}} \mathrm{d}x$ $(a > 0)$

(d) $\int_0^1 \arctan(x) \mathrm{d}x$

(e) si $a > 0$ et $f > 0$ $\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i f x - a|x|} \mathrm{d}x$

(f) $\int\int_{[1,a]\times[1,b]} xye^{x+y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

corrigé succint :

(a) On pose le changement de variable $y = x^2$, donc $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$. Alors l'intégrale devient $\int_0^{+\infty} \dfrac{dy/2}{1+y^2} = [\arctan(y)/2]_0^{+\infty} = \pi/4$.

(b) On pose le changement de variable $y = x^2$, donc $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$. Alors l'intégrale devient $\int_0^{1/4} \dfrac{dy/2}{1-y^2}$.

Là, on décompose en éléments simples la fraction : $\dfrac{1}{1-y^2} = \dfrac{a}{1+y} + \dfrac{b}{1-y}$.

Pour trouver a on multiplie par $1+y$:
$\dfrac{1+y}{1-y^2} = \dfrac{a(1+y)}{1+y} + \dfrac{b(1+y)}{1-y}$,
puis on simplifie en utilisant l'identité remarquable $1-y^2 = (1-y)(1+y)$:
$\dfrac{1}{1-y} = a + \dfrac{b(1+y)}{1-y}$,
et enfin on pose $y+1=0$ donc $y=-1$:
$1/2 = a+0$, donc $a = 1/2$.
De la même manière, en multipliant par $1+y$ et en prenant $y=-1$, on trouve $b = 1/2$.
Finalement,
$\int_0^{+\infty} \dfrac{dy/2}{1-y^2} = [\ln(1+y)/2 - \ln(1-y)/2]_0^{1/4} = \ln(5/3)/4$

(c) On pose le changement de variable $y = e^{ax}$, donc $\mathrm{d}y = ae^{ax}\mathrm{d}x = ay\mathrm{d}x$, donc aussi $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/(ay)$.

Alors l'intégrale devient $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}y}{ay(1+y)}$, et on doit encore effectuer une décomposition en éléments simples. On obtient : $\dfrac{1}{ay(1+y)} = \dfrac{1}{ay} - \dfrac{1}{a(1+y)}$.

Finalement l'intégrale vaut $[\ln(y) - \ln(1+y)]_1^{+\infty}/a = \ln(2)/a$.

(d) On calculer cette intégrale par intégration par parties, en primitivant 1 et en dérivant $\arctan(x)$: $\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x = [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Dans cette deuxième intégrale on reconnaît la dérivée de $\ln(1+x^2)/2$ (déja vu plusieurs fois en S1), et donc finalement
$\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x = [x\arctan(x)]_0^1 - [\ln(1+x^2)/2]_0^1 = \pi/4 - \ln(2)/2$

(e) En la "découpant" par relation de Chasles en 0, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut la somme des deux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{(-2\pi i f - a)x}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 e^{(-2\pi i f + a)x}\mathrm{d}x$ (on a remplacé sur $[0,+\infty[$ la valeur absolue de x par x, et par $-x$ sur l'autre intervalle).

On peut primitiver chaque exponentielle :

$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i f x - a|x|}\mathrm{d}x = [\dfrac{e^{(-2\pi i f - a)x}}{-2\pi i f - a}]_0^{+\infty} + [\dfrac{e^{(-2\pi i f + a)x}}{-2\pi i f + a}]_{-\infty}^0$.

La limite en les infinis de ces primitives est nulle, et il ne reste que les valeurs en 0 : $0 - \dfrac{1}{-2\pi i f - a} + \dfrac{1}{-2\pi i f + a} - 0$.

Et après simplification on trouve l'intégrale égale à $\dfrac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$s

(f) On peut facilement séparer en deux les intégrales : $\int\int_{[1,a]\times[1,b]} xye^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\int_1^a xe^x\mathrm{d}x)(\int_1^b ye^y\mathrm{d}y)$.

Chacune de ces intégrales se calculer par intégration par parties, et finalement l'intégrale faut $[xe^x - e^x]_1^a[ye^y - e^y]_1^b = (ae^a - e^a)(be^b - e^b)$.

2. **transformée de Laplace**

(a) calculer la transformée de Laplace de la fonction sinus.

(b) calculer la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal ($\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$, $\mathrm{sinc}(0) = 1$).

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

(c) si f est une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$ et bornée, calculer la transformée de Laplace de f' en fonction de la transformée de Laplace de f

corrigé succint : 1) On veut calculer $L(\sin)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(x)\mathrm{d}x$, donc $L(\sin)(p) = \mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{-px}e^{ix}\mathrm{d}x)$, $L(\sin)(p) = \mathrm{Im}(\int_0^{+\infty} e^{(-p+i)x}\mathrm{d}x)$,

$L(\sin)(p) = \mathrm{Im}[e^{(-p+i)x}/(-p+i)]_0^{+\infty} = \mathrm{Im}\dfrac{0-1}{-p+i} = \mathrm{Im}\dfrac{p+i}{p^2+1} = \dfrac{1}{1+p^2}$.

2) On veut donc calculer $L(\mathrm{sinc})(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(x)/x\mathrm{d}x$.

On abrègera cette notation $L(\mathrm{sinc})(p)$ en $L(p)$ dans la suite.

On dérive par rapport à p, la dérivée de $L(p)$ est l'intégrale de la dérivée par rapport à p : $L(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(x)\mathrm{d}x$, c'est l'opposé de la transformée de Laplace de sin, c'est donc $-1/(1+p^2)$.

Ainsi en primitivant, $L(p) = -\arctan(p) + c$, où c est constante.

Si p tend vers l'infini, la fonction intégrée tend vers 0, donc (on admet, il faudrait en savoir plus pour être rigoureux) que $L(p)$ tend vers 0 aussi.

Donc $0 = -\pi/2 + c$, et donc $c = \pi/2$.

On a donc $L(p) = \pi/2 - \arctan(p)$.

On a au passage montré que $L(0) = \int_0^{+\infty} \sin(x)/x\mathrm{d}x = \pi/2$

2) $L(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}\mathrm{d}x$. En intégrant par parties (on dérive l'exponentielle on primitive f') on en déduit : $L(f')(p) = [f(x)\exp(-px)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -pf(x)e^{-px}\mathrm{d}x$ soit $-f(0) + pL(f)(p)$.

3. **transformée de Fourier**
   Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t) = e^{-a|t|}$ $(a > 0)$

corrigé succint :

Cf l'exo 1e, c'est le même aux notations près. On trouve $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

4. On considère $f(x) = (\int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \dfrac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   Montrer que $f' + g' = 0$.
   En déduire la valeur de $f + g$.
   Puis en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t$.

corrigé succint :

Pour dériver f, on a "juste" besoin de savoir dériver une intégrale par rapport à sa borne supérieure x (cf terminale : la dérivée par rapport à x de $\int_0^x u(t)\mathrm{d}t$ est $u(x)$) et de savoir dériver le carré d'une fonction (la dérivée de v^2 est $2vv'$) :
$f'(x) = 2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$

Et pour dériver g, de dériver par rapport à x sous l'intégrale : la dérivée de g par rapport à x est l'intégrale de la dérivée par rapport à x de $\dfrac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}$.

Donc $g'(x) = \int_0^1 -2x\exp(-x^2(1+t^2))\mathrm{d}t$

On peut écrire alors $g'(x) = -2x\exp(-x^2)\int_0^1 \exp(-x^2t^2)\mathrm{d}t$, et en posant $y = xt$, $g'(x) = -2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-y^2)\mathrm{d}y$: c'est exactement $-f'(x)$.

On constate donc que $f' + g' = 0$. Donc $f + g$ est constante. Mais $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(1) = \pi/4$.

Donc $f(x) + g(x) = \pi/4$ pour tout x, et c'est aussi la valeur de la limite en $+\infty$ de $f + g$ que l'on calcule :

$f(x)$ tend vers $(\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t)^2$ c'est-à-dire le carré de l'intégrale que l'on cherche à calculer.

Pour $g(x)$: la fonction sous l'intégrale tend vers 0 quand x tend vers l'infini (car quel que soit t, $\exp(-x^2(1+t^2)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini), donc la limite en l'infini de g est l'intégrale entre 0 et 1 de 0, donc vaut 0.

Donc finalement, $0 + \pi/4 = (\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t)^2 + 0$, et donc l'intégrale de Gauss vaut $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.

exercices pratiques

5. On définit les **coefficients de Fourier** d'une fonction de période T par (n étant un entier positif) :
   $$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t.$$
   (a) calculer les coefficients de Fourier d'une fonction constante.
   (b) montrer que si f est paire, pour tout n, $b_n = 0$ (de même f est impaire, $a_n = 0$).
   (c) calculer les coefficients de Fourier de la fonction de période T qui vaut 1 sur $[0, T/2]$ et 0 sur $[T/2, T]$.
   (d) calculer les coefficients pour un cosinus redressé double alternance.

corrigé succinct :

(a) ici $f(t) = f$ est une constante.
Alors si $n = 0$, $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ donc on a $a_0 = 2f$ et $b_0 = 0$.
Si $n \neq 0$, on a $a_n = \dfrac{2f}{T}[\dfrac{\sin(\frac{2\pi nt}{T})}{2\pi n/T}]_0^T$ soit $a_n = \dfrac{f}{\pi}[\sin(2\pi n) - \sin(0)] = 0$ car n est un entier donc $\sin(2\pi n) = 0$.
De même, on trouve que $b_n = 0$.

(b) f étant périodique de période T on peut calculer b_n par la formule $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t$ (on calcule l'intégrale sur une période $[-T/2; T/2]$ plutôt que $[0; T]$).
On peut alors séparer en deux intégrales :
$b_n = \dfrac{2}{T}(\displaystyle\int_{-T/2}^{0} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t + \int_0^{T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\,\mathrm{d}t)$.
On ne touche pas à la seconde, mais on pose $u = -t$ dans la première : on obtient alors :

$b_n = \frac{2}{T}(\int_{T/2}^{0} f(-u)\sin(\frac{-2\pi nu}{T})\ (-\mathrm{d}u) + \int_0^{T/2} f(t)\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t).$

f étant paire et sin impaire, $a_n = \frac{2}{T}(\int_{T/2}^{0} f(u)\sin(\frac{2\pi nu}{T})\ \mathrm{d}u + \int_0^{T/2} f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$, ce qui vaut 0 (c'est la même fonction intégrée, avec les bornes ordonnées en sens inverse).
On montre de même que $a_n = 0$ si f est impaire.

(c) $a_0 = T/2$, et si $n > 1$, $a_n = \frac{2}{T}(\int_0^{T/2} 1\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} 0\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t$ (on coupe l'intervalle $[0;T]$ en deux intervalles sur lesquels $f(t)$est constante).
On calcule alors par primitive : $a_n = \frac{2}{T}[\sin(2\pi nt/T)/(2\pi n/T)]_0^{T/2} = 0$.
De même $b_n = \frac{2}{T}(\int_0^{T/2} 1\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{T/2}^{T} 0\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t$,
et donc par primitive $b_n = \frac{2}{T}[-\cos(2\pi nt/T)/(2\pi n/T)]_0^{T/2} = \frac{2}{T}(-\cos(\pi n) + \cos(0))/(2\pi n/T)$ soit 0 si n est pair, $\frac{2}{n\pi}$ si n est impair. .

(d) Il s'agit de la fonction $I_0|\cos(2\pi t/T)|$ (avec un $I_0 > 0$), qui est paire, donc les b_n sont nuls.
Par ailleurs $a_n = \frac{2I_0}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |\cos(\frac{2\pi t}{T})|\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t$.
$\cos(\frac{2\pi t}{T})$ est positif entre $-T/4$ et $T/4$, négatif entre $-T/2$ et $-T/4$ et entre $T/4$ et $T/2$.
On peut donc écrire
$a_n = \frac{2I_0}{T}(-\int_{-T/2}^{-T/4}\cos(\frac{2\pi t}{T})\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t + \int_{-T/4}^{T/4}\cos(\frac{2\pi t}{T})\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t - \int_{T/4}^{T/2}\cos(\frac{2\pi t}{T})\cos(\frac{2\pi nt}{T})\ \mathrm{d}t)$.

6. diffraction par une fente

Pour une lumière monochromatique de longueur d'onde λ, le champ total diffracté par une fente de largeur a dans la direction de l'angle i vaut à l'instant t :

$$E_T(i) = A\int_{-a/2}^{a/2} \cos(\omega t - kz + \frac{2\pi}{\lambda}x\sin(i))\,\mathrm{d}x.$$

Les grandeurs k, A, ω et z seront considérées comme des constantes (k représente le vecteur d'onde, ω la pulation de l'onde, et z la direction de propagation de l'onde lumineuse).
Calculer cette intégrale, puis calculer la valeur moyenne du carré du champ sur une période temporelle.

(on pourra utiliser la formule : $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos((a+b)/2)\sin((a-b)/2)$)

<u>corrigé succinct :</u> par primitive (la variable dans l'intégrale est x),
$E_T(i) = A\left[\frac{\sin(\omega t - kz + \frac{2\pi}{\lambda}x\sin(i))}{2\pi\sin(i)/\lambda}\right]_{-a/2}^{a/2} = A\frac{\sin(\omega t - kz + \frac{\pi}{\lambda}a\sin(i)) - \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{\lambda}a\sin(i))}{2\pi\sin(i)/\lambda}$.
En utilisant la formule de soustraction des sinus on obtient finalement $E_T(i) = A\frac{\cos(\omega t - kz)\sin(\pi a\sin(i)/\lambda}{\pi\sin(i)/\lambda}$.

La valeur moyenne du carré du champ est donc l'intégrale sur une période temporelle (pour t de 0 à $T = 2\pi/\omega$) de $A^2\frac{\cos^2(\omega t - kz)\sin^2(\pi a\sin(i)/\lambda}{(\pi\sin(i)/\lambda)^2}$.
La seule dépendance en t est dans le cosinus, et on sait que la valeur moyenne sur une période d'un $\cos^2$ est $1/2$, donc finalement, la valeur cherchée vaut $A^2\frac{\sin^2(\pi a\sin(i)/\lambda)}{2(\pi\sin(i)/\lambda)^2}$.

Soit encore $A^2a^2\frac{\sin^2(\pi a\sin(i)/\lambda)}{2(\pi a\sin(i)/\lambda)^2}/2 = (Aa\mathrm{sinc}(\pi a\sin(i)/\lambda))^2/2$.