décomposition en éléments simples de fractions

Pour calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynômes), on cherchera à écrire la fraction comme somme d'un **polynôme** (sa partie entière) et de **fractions plus simples** que l'on sait déjà intégrer (les éléments simples).

On se ramène ainsi de l'intégrale d'une fraction quelconque à des intégrales d'éléments simples que l'on sait facilement intégrer.

En particulier on retrouvera les éléments simples suivants :

- $\frac{1}{x-a}$, de primitive $\ln|x-a|$
- $\frac{1}{(x-a)^2}$, de primitive $\frac{-1}{x-a}$
- $\frac{1}{x^2+1}$, de primitive $\arctan(x)$
- $\frac{x}{x^2+1}$, de primitive $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

décomposition en éléments simples de fractions

Etudions la marche à suivre sur un exemple : la fraction $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x}$

on calcule le quotient de la division du numérateur par le dénominateur : ici on trouve le polynôme constant 1, c'est la partie entière

on factorise sur $\mathbb{R}$ le dénominateur : ici on trouve $x^4+x^3+x^2+x = x(x+1)(x^2+1)$

à chaque facteur irréductible correspond un "élément simple" : ici $\dfrac{a}{x}$, $\dfrac{b}{x+1}$, $\dfrac{cx+d}{x^2+1}$ (le dénominateur est le facteur irréductible, le numérateur est un polynôme de degré strictement inférieur à celui du dénominateur)

décomposition : alors, la fraction de départ est somme de la partie entière et des éléments simples :

$$\frac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Il reste à déterminer les valeurs des coefficents a, b, c et d

décomposition en éléments simples de fractions

détermination des constantes : pour chaque élément simple on va

- multiplier la décomposition par le dénominateur de l'élément
- simplifier les fractions
- remplacer x par une valeur qui annule le dénominateur

ainsi pour trouver a : on multiplie par x, on simplifie les $\frac{x}{x}$ qui apparaissent
$\frac{x^4+1}{(x+1)(x^2+1)} = x + \frac{a}{1} + \frac{bx}{x+1} + \frac{(cx+d)x}{x^2+1}$, on remplace x par 0 : $\frac{1}{1} = 0 + \frac{a}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1}$, donc $a = 1$

de même pour trouver b : on multiplie par $x+1$, on simplifie les $\frac{x+1}{x+1}$ qui apparaissent et on remplace x par -1 : on trouve $b = -1$.

de même pour trouver c et d : on multiplie par x^2+1, on simplifie les $\frac{x^2+1}{x^2+1}$ qui apparaissent

$$\frac{x^4+1}{x(x+1)} = (x^2+1) + \frac{a(x^2+1)}{x} + \frac{b(x^2+1)}{x+1} + \frac{(cx+d)}{1}$$

et on remplace x par i : $\frac{i^4+1}{i(i+1)} = (i^2+1) + \frac{a(i^2+1)}{i} + \frac{b(i^2+1)}{i+1} + \frac{(ci+d)}{1}$, donc

$\frac{2}{-1+i} = 0+0+0+ci+d$. Par conséquent, c et d sont les parties imaginaire et réelle de $\frac{2}{-1+i} = \frac{2(-1-i)}{2} = -1-i$ donc $c = -1$, $d = -1$.

décomposition en éléments simples de fractions

On a donc trouvé la décomposition en éléments simples

$$\frac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x^2+1} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$$

et cela permet de calculer les primitives et intégrales de la fraction de départ.

Par exemple, $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x}\mathrm{d}x$ vaut :

$$\int_1^2 1\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$[x]_1^2 + [\ln(x)]_1^2 - [\ln(1+x)]_1^2 - [\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^2 - [\arctan(x)]_1^2$$

$$1+\ln(2)-\ln(3)+\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(5)+\frac{1}{2}\ln(2)-\arctan(2)+\arctan(1)$$

donc finalement :

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^4+x^3+x^2+x}\mathrm{d}x = 1-\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(5)+\frac{5}{2}\ln(2)-\arctan(2)+\pi/4$$

Exemples :

exemple 1 : calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)} \mathrm{d}x$

(réponse : on trouve $1 - 7\ln(2)/3$)

exemple 2 : calculer $\int_{0}^{+\infty} \frac{3/2}{1+3p/2+p^2/2} \mathrm{d}p$

(réponse : on trouve $3\ln(2)$)

décomposition en éléments simples et changement de variable

On peut parfois avoir besoin de combiner plusieurs techniques de calcul...

exemple : calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos\theta}$ en posant $t = \tan\frac{\theta}{2}$

Les bornes sont $t = \tan 0 = 0$ et $t = \tan\frac{\pi}{8}$, et $dt = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})d\theta$, donc $d\theta = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

La formule donnée dans le cours de trigonométrie $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ permet d'exprimer

finalement $\displaystyle\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{2dt}{1-t^2}$

La décomposition en éléments simples $\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t-1}$ amène à la valeur

$$\left[\ln\frac{|t+1|}{|t-1|}\right]_0^{\tan\frac{\pi}{8}} = \ln\frac{|\tan\frac{\pi}{8}+1|}{|\tan\frac{\pi}{8}-1|}$$

Mais (exercice !) $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$, donc après simplification, $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln(1+\sqrt{2})$

remarque : pour une fraction en $\sin\theta$ et $\cos\theta$, le changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$ n'est pas toujours le plus simple, mais il permet **systématiquement** de ramener l'intégration d'une fraction trigonométrique à l'intégration d'une fraction rationnelle en t

intégrale double

f fonction positive

S surface d'équation $z = f(x, y)$

D partie du plan horizontal $z = 0$

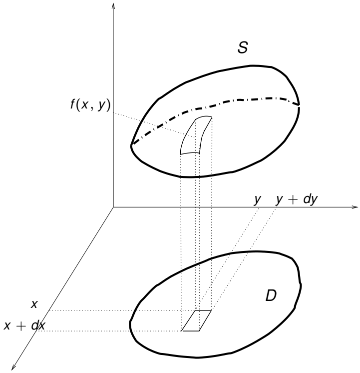
V ensemble des points au dessus de D, sous la surface S :

$$V = \{(x, y, z) | (x, y, 0) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

volume de V ?

intégrale double

on décompose V en petits pavés :
base rectangulaire $[x, x + \mathrm{d}x] \times [y, y + \mathrm{d}y]$, hauteur $f(x, y)$, donc volume
$\mathrm{d}^2 V = f(x, y) \times \mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x, y) \times \mathrm{d}^2 S$

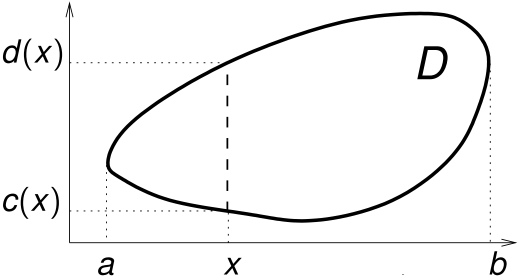


volume total : « somme » de tous ces éléments

$$V = \int \int_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

méthode de calcul ?

équations de D : $a \leq x \leq b$, $c(x) \leq y \leq d(x)$



aire des tranches à x fixé $\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, puis nouvelle intégrale en x

intégrale double = deux intégrales simples !

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

(on peut aussi intégrer d'abord en y, puis x)

exemples

exemple 1 : R le rectangle $[0,1] \times [0,1]$.

inéquations décrivant R ?

calcul de $\int\int_R 3xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

exemple 2 : T le triangle de côtés $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$

inéquations décrivant T ?

calcul de $\int\int_T 3xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

cas particulier : calcul d'aire

si $f = 1$?

$\int\int_D 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ volume d'un ensemble "cylindrique" de base D et hauteur 1

le volume vaut aire$(D) \times 1$, donc :

aire du domaine D :

$$\text{aire}(D) = \int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Mais attention, plus généralement une intégrale double peut représenter entre autres :

- un volume : $\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- une aire $\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- une masse $M = \int\int_D \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, σ masse surfacique

- un moment d'inertie $I = \int\int_D d(M,\Delta)^2\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

- une force $F = \int\int_D \mathrm{d}^2F$

- etc

(et la fonction intégrée n'est pas toujours positive)

exemples de calculs d'aire

exemple 1 : aire d'un triangle T de base OA avec $A(a,0)$ et de troisième sommet $B(b,h)$

calcul de $\int\int_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y$: on retrouve la formule connue $ah/2$.

exemple 2 : aire du disque de centre O et de rayon 1

calcul de $\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$: on retrouve la valeur π.

cas particulier : rectangle et $f(x, y) = g(x)h(y)$

si :

D rectangle de côtés parallèles aux axes $[a, b] \times [c, d]$,

f est un produit $f(x, y) = g(x)h(y)$

alors :

$$\int\int_D g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g \times \int_c^d h$$

exemples de calculs d'intégrales sur un rectangle

exemple 1 : masse d'une plaque carré, côté L, masse surfacique σ ?

exemple 2 : moment d'inertie de la plaque par rapport à un côté ?

centre de masse d'un solide

Pour un système ponctuel (P_1, m_1), ..., (P_k, m_k) le centre de masse est le point G tel que $m_1 \vec{GP}_1 + \ldots + m_k \vec{GP}_k = \vec{0}$.

En projetant on trouve les égalités : $m_1(x_1 - x_G) + \ldots + m_k(x_k - x_G) = 0$ et $m_1(y_1 - y_G) + \ldots + m_k(y_k - y_G) = 0$. Ainsi on obtient les

coordonnées du centre de masse d'un ensemble de points $P_i(x_i, y_i)$ de masse m_i :

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_k x_k}{m_1 + \ldots + m_k} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{m_1 y_1 + \ldots + m_k y_k}{m_1 + \ldots + m_k}$$

Pour un solide "continu" : par analogie on a les

coordonnées du centre de masse d'un solide S de masse surfacique σ :

$$x_G = \frac{\int\int_S \sigma(M)\, x\, \mathrm{d}^2 S}{M} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\int\int_S \sigma(M)\, y\, \mathrm{d}^2 S}{M},$$

M étant la masse du solide : $M = \int\int_S \sigma(M) \mathrm{d}^2 S$.

intégrales triples

de même :

on intégre un infiniment petit d'ordre 3 sur un solide V de l'espace pour obtenir

- un volume $\int\int\int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- une masse $\int\int\int_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- un moment d'inertie $\int\int\int_V d(M,\Delta)^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- etc

quand utiliser des coordonnées polaires ?

Si D a des éléments de symétrie circulaire (disque, demi-disque, couronne circulaire, ...),

si la fonction intégrée ne dépend que de la distance au centre - ou au moins possède une expression "simple" en coordonnées polaires,

alors il est souvent intéressant d'exprimer l'intégrale à l'aide des coordonnées polaires.

Il faut pour cela connaître :

- un ensemble d'(in)équations pour décrire D

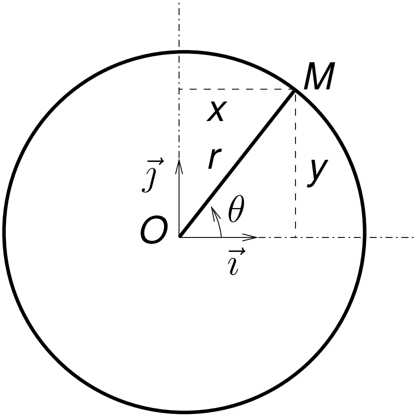
- l'expression de la fonction dans ce système de coordonnées

- l'expression des éléments de surface $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dans ce système de coordonnées

C'est un prolongement de la notion de changement de variables des intégrales simples.

définition des coordonnées polaires

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ repère orthonormé du plan. M de coordonnées cartésiennes (x, y)



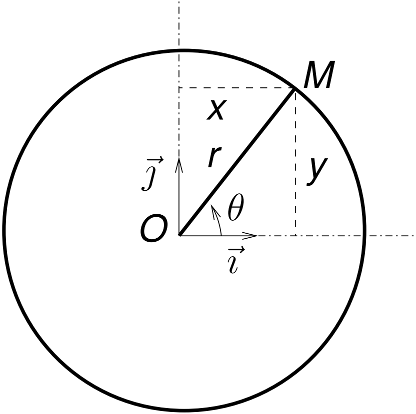
coordonnées polaires de M :

$$r = ||\vec{OM}|| \quad \text{et} \quad \theta = (\vec{\imath}, \vec{OM})$$

r est unique, et θ défini à 2π près (sauf si $M = O$)

passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

relations entre x, y, r et θ ?



par définition du sinus et du cosinus :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires

pour r : $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2$, donc $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

pour θ : on sait que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$: θ et $\arctan(y/x)$ ont même tangente
$\arctan(y/x) \in [-\pi/2; \pi/2]$: c'est θ si $x > 0$, sinon il faut ajouter $\pm\pi$

coordonnées polaires en fonction de x et y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \left|\begin{array}{ll} \theta = \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \theta = \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \theta = \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \theta = \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ \theta = -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{array}\right.$$

le repère polaire

à partir du vecteur position $\vec{OM} = r\cos\theta\vec{\imath} + r\sin\theta\vec{\jmath}$, on définit

le vecteur radial

$$\vec{u_r} = \frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$$

et

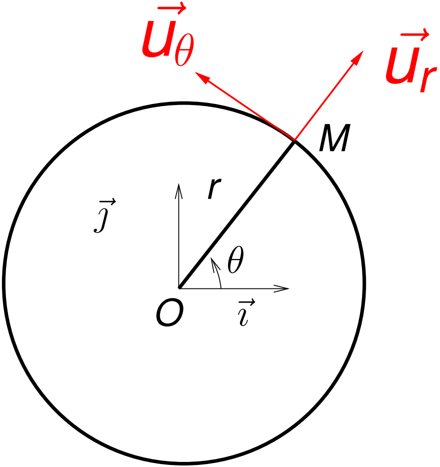
le vecteur orthoradial

obtenu depuis $\vec{u_r}$ par rotation d'angle $\pi/2$, $\quad \vec{u_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$

$(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est un repère orthonormé direct

Ces vecteurs ne dépendent que de θ !

le repère polaire



dérivation du repère polaire

$$\vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$$
$$\vec{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

dérivation par rapport à θ

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{u_\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{u_r}$$

Si r et θ sont des fonctions de t, on applique la formule $(\vec{a} \circ f)'(t) = f'(t)\,\vec{a}'(f(t))$ avec $\vec{a} = \vec{u_r}$ et $f(t) = \theta(t)$.

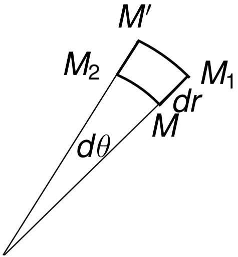
dérivation par rapport à t

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t} = \theta'\,\vec{u_\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\theta'\,\vec{u_r}$$

en polaires : éléments de longueur, de surface

distances et surface parcourues
lors de petites variations des coordonnées polaires ?

M de coordonnées r et θ
M_1 de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et θ
M_2 de coordonnées r et $\theta + \mathrm{d}\theta$
M' de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et $\theta + \mathrm{d}\theta$



éléments de longueur

$$MM_1 = \mathrm{d}r$$
$$MM_2 \simeq r\,\mathrm{d}\theta \quad \text{(segment, proche d'un arc de cercle)}$$
$$MM' \simeq \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2}$$

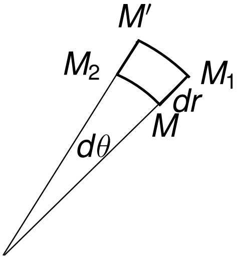
déplacements élémentaires $\vec{\mathrm{d}l}$

$$\vec{MM_1} = \mathrm{d}r\ \vec{u_r}$$
$$\vec{MM_2} \simeq r\,\mathrm{d}\theta\ \vec{u_\theta}$$
$$\vec{MM'} \simeq \mathrm{d}r\ \vec{u_r}\ +\ r\,\mathrm{d}\theta\ \vec{u_\theta}$$

éléments de longueur, de surface

distances et surface parcourues
lors de petites variations des coordonnées polaires ?

M de coordonnées r et θ
M_1 de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et θ
M_2 de coordonnées r et $\theta + \mathrm{d}\theta$
M' de coordonnées $r + \mathrm{d}r$ et $\theta + \mathrm{d}\theta$



élément de surface

$$\mathrm{d}^2S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

exemples de calculs coordonnées polaires

bornes, fonction et élément de surface exprimés avec r et θ

en polaires

$$\int\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

exemple 1 : aire du disque ? $\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

exemple 2 : moment d'inertie d'un disque homogène de masse surfacique σ, par rapport à son centre ? $\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2\,\sigma\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

systèmes d'équations linéaires

Pour résoudre un système de n équations linéaires à m inconnues on peut procéder de différentes manières, plus ou moins efficaces.

Une méthode systématique intéressante est d'utiliser des **combinaisons linéaires** pour transformer successivement le système en des systèmes équivalents (qui ont le même ensemble de solutions) mais plus simples.

Les opérations autorisées sont :
- permuter l'ordre des lignes,
- multiplier une ligne par une constante non nulle,
et surtout :
- remplacer une ligne par la somme de la ligne et d'un multiple quelconque d'une autre ligne,

et on essaie à chaque étape de remplacer le système par un système équivalent où une même variable n'apparaît qu'une fois sur les 3 lignes.

On pourra par exemple noter $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ pour l'opération de remplacement de la ligne 2 par la somme de la ligne 2 et de 3 fois la ligne 1.

systèmes d'équations linéaires

exemple 1 : on veut résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x + y = 0 \\ -x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

On peut par exemple avec les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ supprimer les x des lignes 1 et 2 :

$$\begin{cases} - y + 5z = -5 \\ 2z = -2 \\ -x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

On obtient alors directement grâce à la ligne 2 : $z = -1$

puis grâce à la ligne 1 : $y = 0$

puis grâce à la ligne 3 : $x = 0$.

Le système admet donc la solution unique $(0, 0, -1)$.

systèmes d'équations linéaires

exemple 2 : pour résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x - 3y - z = 1 \\ x - 5y - 2z = -2 \end{cases}$$

on peut par exemple avec les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ supprimer les z des lignes 1 et 3 :

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 3x - 3y - z = 1 \\ -5x + y = -4 \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 sont équivalentes (car opposées) donc le système se résume à

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 3x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

d'où l'on tire : $y = 5x - 4$ (avec la ligne 1) puis avec la ligne 2 :
$z = 3x - 3y - 1 = 3x - 3(5x - 4) - 1$ soit $z = -12x + 11$.

Le système admet donc une infinité de solutions : les points de la droite passant par $(0, -4, 11)$ et de vecteur directeur $(1, 5, -12)$.

espace vectoriel

espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

c'est un ensemble E muni d'une opération d'addition et d'une opération de multiplication par un réel

exemple 1 : $\mathbb{R}^2$, les vecteurs du plan

exemple 2 : $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$

exemple 3 : H l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$

combinaisons linéaires

combinaison linéaire :

c'est une expression $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs de E et λ et μ réels

(idem avec 3 vecteurs $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$, ou plus...)

exemple 1 : le vecteur $\vec{u} = (2, -3, 5)$ dans $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$: $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$

Par définition, tout espace vectoriel E est stable par combinaisons linéaires

exemple 2 : les solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions $y(x) = Ae^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) + Be^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$: ce sont des combinaisons linéaires des deux solutions $y_1(x) = e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2)$ et $y_2(x) = e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$

bases

base :

toute famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ telle que tout vecteur de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des (u_i) est appelée base de E

exemple 1 : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$

exemple 2 : y_1 et y_2 forment une base de H

exemple 3 : $(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$ forme une base (infinie) de l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels

exemple 4 : trouver une base de l'ensemble des solutions de l'équation
$$2y'' + 2y' - y = 0$$

dimension d'un espace vectoriel

dimension :

la dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments de l'une de ses bases

exemple 1 : $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, $\mathbb{R}^3$ de dimension 3

exemple 2 : l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre et sans second membre est de dimension 2

exemple 3 : $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie

exemple 4 : $\mathbb{R}_n[X]$ ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est de dimension $n+1$

application linéaire

application linéaire :

si f est une application entre deux espaces vectoriels E et F, on dit que f est linéaire si l'image de toute combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images, c'est-à-dire si : $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

exemple 1 : l'identité Id est linéaire sur tout espace vectoriel

exemple 2 : toute rotation plane de centre O, ou de l'espace autour d'un axe passant par O

exemple 3 : la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$

exemple 4 : l'application qui à une fonction f continue associe $\int_0^1 f$

matrices

matrice = tableau rectangulaire de nombres

on utilise surtout deux cas particuliers :

les matrices carrées

$M_n(\mathbb{R})$ matrices à n lignes et n colonnes

les vecteurs

matrices à n lignes et 1 colonne

addition

on peut additionner deux matrices ayant même nombre de lignes et de colonnes

exemple : $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrices

multiplication

on peut multiplier la matrice M par la matrice N si

le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N

alors MN a

autant de lignes que M et de colonnes que N

et le coefficient de MN en ligne i, colonne j est obtenu en calculant le

produit scalaire de la ligne i de M par la colonne j de N

en particulier :

si $M \in M_n(\mathbb{R})$, $N \in M_n(\mathbb{R})$ alors $MN \in M_n(\mathbb{R})$

si $M \in M_n(\mathbb{R})$, X vecteur colonne à n lignes, alors MX vecteur colonne à n lignes

exemples de multiplication de matrices

exemple 1 : $$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 10\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

exemple 2 : $$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 6\\ 3\end{pmatrix}$$

attention en général $MN \neq NM$

matrices particulières

matrice nulle :

c'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls.
Elle est notée 0_n ou simplement 0

$0A = 0$, $A0 = 0$ dès que les dimensions autorisent les multiplications

matrice identité :

c'est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale principale, des 0 partout ailleurs.
Elle est notée I_n ou simplement I.

$$\text{par exemple } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$IA = A$, $AI = A$, dès que les dimensions autorisent les multiplications

exemple : matrice de transfert d'un système optique

Relation entre $\begin{pmatrix} h_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ hauteur et angle d'entrée d'un rayon entrant, et $\begin{pmatrix} h_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$ hauteur et angle à la sortie ?

$\begin{pmatrix} h_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ avec M matrice du système optique

Quelques exemples de systèmes "simples" : pour un espace vide de longueur d :
$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour un miroir plan : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, pour un miroir sphérique de rayon R :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R & -1 \end{pmatrix}$, pour une lentille : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$,

Pour un système optique plus compliqué : la matrice de l'assemblage est le produit des matrices des éléments qui le composent !

exemple : trois masses et deux ressorts

On étudie le mouvement horizontal de trois masses m_1, m_2, m_3 attachées par des ressorts de raideurs k_1 et k_2 (la réaction du support compense les poids, pas de frottements).

Équations du mouvement reliant x_1, x_2, x_3 à leurs dérivées ?
Appliquer le PFD permet d'établir les relations :

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1/m_1 & k_1/m_1 & 0 \\ k_1/m_2 & -(k_1+k_2)/m_2 & k_2/m_2 \\ 0 & k_2/m_3 & -k_2/m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + L \\ x_2 \\ x_3 - L \end{pmatrix}$$

L'étude de cette matrice permettra de voir que tout mouvement peut être vu comme la combinaison linéaire de trois mouvements fondamentaux, et de déterminer ceux-ci.

matrice d'une application linéaire

si f est une application linéaire d'un espace de dimension 3 dans un espace de dimension 3, si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de cet espace,

matrice de f :

la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est la matrice 3×3 dont les trois colonnes correspondent respectivement aux vecteurs $f(\vec{\imath})$, $f(\vec{\jmath})$ et $f(\vec{k})$.

exemple 1 : la matrice de l'application identité est I_3

exemple 2 : la matrice de la symétrie d'axe (Ox) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

inverse

matrice inversible

M est inversible si il existe N telle que $MN = I$
alors on note $N = M^{-1}$,
et $MM^{-1} = M^{-1}M = I$

exemple 1 : I est inversible, et $I^{-1} = I$

exemple 2 : 0 n'est pas inversible

exemple 3 : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

matrices et systèmes linéaires

tout système de n équations à n inconnues

$$\left(\text{par exemple} \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y = -1 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases} \right)$$

est équivalent à une équation matricielle $AX = B$ avec

1. A la matrice des coefficients du système $\left(\text{ici } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$
2. X le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
3. B le vecteur colonne des seconds membres $\left(\text{ici } B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

résolution d'un système à matrice inversible

si A n'est pas inversible : aucune solution, ou bien une infinité

si A est inversible : unique vecteur solution

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

utilisation ?

si on sait calculer A^{-1}, on résoud le système

si on sait résoudre le système pour $B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on sait inverser A

résolution : exemple

inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

on résoud $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & - & z & = & x' \\ x & + & y & & & = & y' \\ -x & - & y & + & 2z & = & z' \end{array}\right.$.

on trouve $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x' & - & 3/2y' & + & 1/2z' & = & x \\ -x' & + & 5/2y' & - & 1/2z' & = & y \\ 0 & + & 1/2y' & + & 1/2z' & = & z \end{array}\right.$

et donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

l'approximation des petits angles :

On considère l'équation du pendule en mécanique : $l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Si on veut exprimer θ en fonction du temps ? On ne sait pas trouver de formule ! !

Mais pour de petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$. Et l'équation devient $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$: c'est une équation linéaire du second ordre, on sait la résoudre :

$$\theta(t) = a\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + b\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t),$$

$$\text{soit encore } \theta(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi)$$

(avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arctan(b/a)$, $+\pi$ si $a < 0$)

On a donc, en remplaçant une fonction comme $\sin$ par un polynôme simple ($\sin\theta \simeq \theta$) pu trouver une formule approchée pour une fonction solution $\theta(t)$ que l'on ne sait pas exprimer du tout dans le cas général.

un autre exemple d'approximation :

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

On calcule quelques valeurs, ainsi que les valeurs de de $1 + x/2$ et de $1 + x/2 + 3x^2/8$:

x	$f(x)$	$1 + x/2$	$1 + x/2 + 3x^2/8$
1	$+\infty$	1.5	1.875
0.5	1.41214	1.25	1.34375
0.1	1.05409	1.05	1.05375
0.01	1.0050378	1.005	1.0050375
0.001	1.000500375	1.0005	1.000500375

On voit que pour x petit (proche de 0), $1 + x/2$ est une bonne approximation de $f(x)$, et $1 + x/2 + 3x^2/8$ une encore meilleure.

Pour x moins proche de 0, c'est nettement moins vrai.

développement limité

Le développement limité d'ordre n d'une fonction f en x_0 est une expression $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x)$, avec les a_i constants, et $\epsilon(x)$ une fonction qui tend vers 0 en x_0.

On peut aussi noter le reste $(x - x_0)^n\ \epsilon(x)$ sous la forme $\circ((x - x_0)^n)$, ou encore, par abus, sous la forme ...

Le plus souvent, on prendra $x_0 = 0$ et on écrira pour une fonction f son

développement limité en 0 d'ordre n

de la forme $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + ...$

Ce développement n'a de sens que si x est petit.
Alors, chacun des termes est plus petit (quand x tend vers x_0) que le précédent et rend l'approximation plus précise.

exemple : le développement limité d'ordre 1 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $1 + x/2 \ldots$,
le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $1 + x/2 + 3x^2/8 + \ldots$

formule de Taylor

Les coefficients d'un développement limité d'une fonction f peuvent se calculer par les :

formule de Taylor (générale) :

une fonction $n+1$ fois dérivable admet pour développement limité d'ordre n en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

formule de Taylor-Young (développement limité en 0) :

une fonction $n+1$ fois dérivable admet pour développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Le développement limité d'ordre 0 en 0 d'une fonction continue est $f(x) = f(0) + ...$: cela revient à remplacer la fonction par sa valeur en 0.

Le développement limité d'ordre 1 en 0 d'une fonction dérivable est $f(x) = f(0) + f'(0)x + ...$: cela revient à approcher $f(x)$ par l'équation de la tangente en 0 à la courbe de f.

trois exemples simples :

la valeur en 0 de la dérivée n-ième de l'exponentielle vaut toujours 1, donc :

exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

de même la valeur en 0 de la dérivée n-ième du cosinus vaut alternativement $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$ donc

cosinus :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

et de même :

sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

applications aux calculs de limite :

exemple 1 : on souhaite déterminer la limite en 0 de $\dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$".

Difficile de comparer les valeurs d'un cosinus, d'une exponentielle ; et aucune formule exacte ne permet de simplification de l'expression.

Mais on cherche la limite en 0 : pas besoin de formule exacte, il suffit de "simplifier" les expressions pour x proche de 0 !

On va se contenter de prendre une expression avec 2 termes non nuls, donc :

on remplace $\cos(x)$ par $1 - x^2/2 + ...$ (DL d'ordre 2)

et e^{x^2} par $1 + x^2 + ...$

Ainsi, $\dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} = \dfrac{1-(1-x^2/2+\ldots)}{(1+x^2+\ldots)-1} = \dfrac{x^2/2+\ldots}{x^2+\ldots}$.

Cette expression peut se simplifier par x^2 : $\dfrac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} = \dfrac{1/2+\ldots}{1+\ldots}$

...et la limite cherchée est donc $1/2$.

applications aux calculs de limite :

exemple 2 : on souhaite déterminer la limite en 0 de $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

On commencera par essayer de se ramener à une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$", en additionnant les deux fractions : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \sin(x)}{x\sin(x)}$

On peut alors utiliser un développement limité d'ordre 3, à deux termes non nuls, de sin : $\sin(x) = x - x^3/6 + \ldots$.

Ainsi, $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x - x^3/6 + \ldots)}{x(x - x^3/6 + \ldots)} = \dfrac{x^3/6 + \ldots}{x^2 - x^4/6 + ..}$.

En simplifiant l'expression par x^2, on lève l'indétermination : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x/6 + \ldots}{1 - x^2/6 + \ldots}$, et la limite est donc nulle.

DL d'une puissance

pour tout réel α et tout entier positif k on voit par récurrence que
$$\frac{d^k(1+x)^\alpha}{dx^k} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \text{ donc}$$

pour une puissance α :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ \ldots$$

si $\alpha = -1$ on obtient en particulier

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots$$

de même si $\alpha = 1/2$,

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \ldots$$

DL d'une somme, d'un produit

DL d'une somme :

le développement limité d'ordre n en 0 de $f+g$ est la somme du développement limité d'ordre n en 0 de f et du développement limité d'ordre n en 0 de g

exemple : le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sin(x)+\sqrt{1+x}$ est $1+3x/2-x^2/8+\ldots$

DL d'un produit :

pour déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de fg il suffit de multiplier le développement limité d'ordre n en 0 de f par celui de g, **en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à** n

exemple : le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}\cos(x)$ est $1+x/2-5x^2/8+\ldots$

exemple : le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x^2\exp(x)$ est $x^2+x^3+x^4/2+\ldots$

DL d'une composée

DL de $f \circ g$

Pour obtenir le développement limité d'ordre n en 0 de $f(g(x))$, on remplace dans le développement limité d'ordre n de $f(x)$ en 0, le terme x par le développement limité de $g(x)$ d'ordre n en 0.
Puis on développe en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

exemple 1 : le DL d'ordre 3 en 0 de $\cos(2x)$ est $1 - (2x)^2/2 + \ldots = 1 - 2x^2 + \ldots$

exemple 2 : le DL d'ordre 4 en 0 de $\exp(x^2)$ est $1 + x^2 + x^4/2 + \ldots$

exemple 3 : le DL d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+3x^2}$ est $1 - (x+3x^2) + (x+3x^2)^2 + \ldots$
soit $1 - x - 3x^2 + x^2 + 6x^3 + 9x^4 + \ldots$.

Mais, étant partis d'un DL d'ordre 2 de $1/(1+x)$, les termes de degré 3 et 4 ne sont pas significatifs, et ne correspondent pas aux termes que l'on obtiendrait en calculant un DL d'ordre 3 ou 4.

Finalement on obtient le DL d'ordre 2 en 0 : $1 - x - 2x^2 \ldots$.

DL d'un quotient

DL d'un quotient :

si $g(0) \neq 0$, le développement limité d'ordre n de $f(x)/g(x)$ est le quotient de la division selon les puissances croissantes du développement limité d'ordre n de f par le développement limité d'ordre n de g.

exemple 1 : le DL d'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x+3x^2}$ est $1 - x - 2x^2 + \ldots$ car

$$
\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & & & & & & & 1 & + & x & + & 3x^2 \\
\cline{8-12}
1 & + & x & + & 3x^2 & & & 1 & - & x & - & 2x^2 \\
\cline{1-5}
 & - & x & - & 3x^2 & & & & & & & \\
 & - & x & - & x^2 & + & \ldots & & & & & \\
\cline{2-7}
 & & & - & 2x^2 & + & \ldots & & & & & \\
 & & & - & 2x^2 & + & \ldots & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

exemple 2 : le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\tan(x)$ est $x + x^3/3 + \ldots$

DL d'une primitive

DL d'une primitive F de f :

si $F'(x) = f(x)$, on obtient le développement limité d'ordre n de F en primitivant le développement limité d'ordre $n-1$ de $f(x)$ et en prenant $F(0)$ pour constante d'intégration.

exemple 1 : le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ est
$$x - x^2/2 + x^3/3 + \dots$$

exemple 2 : le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\arctan(x)$ est
$$x - x^3/3 + x^5/5 + \dots$$

DL en l'infini et asymptotes

En utilisant la quantité $1/x$, on peut aussi utiliser les développements limités pour déterminer des limites et asymptotes en l'infini.

Par exemple, pour trouver la droite asymptote en $+\infty$ à la courbe $C : y = \sqrt{x^2 + x + 1}$, on aimerait remplacer la racine par des fonctions plus simples à manipuler...on va utiliser un développement limité.

On a vu que **si** u **est proche de 0**, $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 - u^2/8 + \dots$.

On va ici faire apparaître des termes $u = 1/x$, qui tendent bien vers 0 si x tend vers l'infini, en mettant x^2 en facteur dans la racine : $y = x\sqrt{1 + (1/x + 1/x^2)}$.

En utilisant le développement limité : $y = x(1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) - \frac{1}{8}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^2 + \dots)$

En développant et en ne gardant pas les termes en $1/x^3$, $1/x^4$, ... :

$y = x(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^2} + \dots)$ soit finalement $y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \dots$.

Si on considère la droite $D : y = x + 1/2$, on constate donc que la différence de hauteur entre un point de C et un point de D vaut approximativement $\frac{3}{8x}$: elle est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

Par conséquent, D est asymptote à C, et C est située au dessus de D.

définition du déterminant

determinant

c'est l'unique application $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui vérifie

- linéarité par rapport à chaque colonne
- si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul
- $\det(I) = 1$

on note $\det(A)$ ou $|A|$ le déterminant d'une matrice A

propriété fondamentale

M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$

propriétés du déterminant

- déterminant d'une matrice 1×1 : $\det(a) = |a| = a$
- **développement selon une colonne** :
  A_{ij} matrice obtenue à partir de A en enlevant la ligne i et la colonne j.
  Alors $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$
- **déterminant d'une matrice** 2×2 : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- déterminant d'une matrice triangulaire : produit des termes de la diagonale
- **déterminant inchangé si on remplace la colonne** C_i **par** $C_i + \lambda C_j$ (λ réel quelconque, $i \neq j$)
- déterminant change de signe si on échange deux colonnes
- le déterminant est multiplié par λ si on multiplie une colonne par λ
- tout ce qui précède est valable en remplaçant "colonne" par "ligne"

exemple de calcul d'un déterminant 3×3

$$\text{calculer} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

on trouve 2

résolution d'un système

On étudie un système $AX = B$

On suppose $\det(A) \neq 0$: le système admet alors une solution unique X, on cherche ses coordonnées x_i

On note A_i la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par la matrice B,

alors $B = AX = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i$,
donc $\det(A_i)$ est la somme de $x_i \det(A)$ et de $n-1$ déterminants nuls (car ils ont deux colonnes égales), et donc $\det(A_i) = x_i \det(A)$. Ainsi :

résolution d'un système

si $\det(A) \neq 0$, le système $AX = B$ admet une solution unique,

dont les coordonnées sont les $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

avec A_i la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par la matrice B

exemple 1

a étant un réel fixé, dire si le système admet une unique solution (x, y, z), résoudre $\begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ x - y + az = 2 \\ ax - y + z = -1 \end{cases}$ et si oui la déterminer.

on trouve un déterminant du système $d = (a-1)(a^2 + a + 4)$ et s'il est non nul, on trouve x, y et z comme quotient d'un déterminant par d

exemple 2

$R \neq 0$, F, m, g, a étant connus, déterminer α à partir du système :

$$\begin{cases} R \cos\alpha - F\sin\alpha = mg \\ F \cos\alpha + R\sin\alpha = ma \end{cases}$$

le déterminant du système est $R^2 + F^2 > 0$

on trouve $\cos\alpha = \dfrac{m(Rg + Fa)}{R^2 + F^2}$,

et $\sin\alpha = \dfrac{m(Ra - Fg)}{R^2 + F^2}$

calcul de l'inverse d'une matrice

on note $\Gamma_{i,j}$ le produit de $(-1)^{i+j}$ par le déterminant de la matrice obtenue en enlevant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A (les $\Gamma_{i,j}$ sont les **cofacteurs** de A)

alors si A est inversible,

$\dfrac{\Gamma_{j,i}}{\det(A)}$ est le coefficient de la ligne i et colonne j de A^{-1}

(attention à l'inversion des coordonnées : pour calculer le coefficient en ligne i et colonne j de l'inverse de A on utilise bien le cofacteur $\Gamma_{j,i}$)

matrice 2×2

inverser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

on trouve $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

une matrice 3×3

$$\text{inverser} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{on trouve} \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

rappel des méthodes de calcul d'intégrale : primitive

revoir le cours et les exercices T1 du TD 5 de S1.

exemple : $\int_0^3 \sqrt{2x+3}\mathrm{d}x = [\frac{(2x+3)^{3/2}}{2\times 3/2}]_0^3 = [\frac{(2x+3)^{3/2}}{3}]_0^3 = \dfrac{9^{3/2} - 3^{3/2}}{3} = 9 - \sqrt{3}$

rappel des méthodes de calcul d'intégrale : intégration par parties

revoir le cours et les exercices T2 du TD 5 de S1.

exemple : pour calculer $\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$: on choisit de dériver x en 1, de primitiver e^{2x} en $e^{2x}/2$, et on obtient donc : $\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = [xe^{2x}/2]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}/2\,\mathrm{d}x$, cette deuxième intégrale se calcule alors par primitive :

$$\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = [xe^{2x}/2]_0^1 - [e^{2x}/4]_0^1 = e^2/2 - e^2/4 + 1/4 = (e^2+1)/4$$

rappel des méthodes de calcul d'intégrale : changement de variable

revoir le cours et les exercices T3 du TD 5 de S1.

exemple : pour calculer $\int_2^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ on peut poser $y = x^2$, donc $\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x$ et l'intégrale devient $\int_4^{+\infty} e^{-y}/2\ \mathrm{d}y = [-e^{-y}/2]_4^{+\infty}$ soit $e^{-4}/2$.

rappel des méthodes de calcul d'intégrale : décomposition en éléments simples

revoir le cours et les exercices T1 du TD 1 de S2.

exemple : pour $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$:
- la partie entière de la fraction (le quotient de x^2+1 par x^2+x vaut 1
- on factorise le dénominateur en $x(x+1)$, on peut donc mettre la fraction sous la forme $1+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1}$,
- pour trouver α on peut par exemple multiplier l'expression par x, simplifier, et prendre $x=0$: $x\frac{x^2+1}{x^2+x}=x+\frac{\alpha x}{x}+\frac{\beta x}{x+1}$, d'où $\frac{x^2+1}{x+1}=x+\alpha+\frac{\beta x}{x+1}$, et en prenant $x=0$: $1=\alpha$.
De même on trouve $\beta=-2$, donc une primitive de la fonction intégrée sur $[1,2]$ est $x+\ln x-2\ln(x+1)$, et par conséquent l'intégrale vaut $1+3\ln 2-2\ln 3$.

rappel des méthodes de calcul d'intégrale : linéarisation de polynômes trigonométriques

revoir le cours et les exercices T4 du TD 5 de S1.

exemple : pour calculer $\int_0^{\pi/4} \sin^3\theta \, d\theta$ on peut grâce aux formules d'Euler, linéariser $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(-\sin 3\theta + 3\sin\theta)$, ce qui permet de trouver une primitive ($\cos(3\theta)/3$ pour $-\sin(3\theta)$, et $-3\cos(\theta)$ pour $3\sin(\theta)$), et au final l'intégrale vaut $\dfrac{2}{3} - \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$.

Intégrales fonction de la borne supérieure

propriété :

si f est une fonction continue sur un intervalle I,
si $a \in I$,
si on définit sur I la fonction F par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,
alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.
Plus précisément, c'est la primitive de f qui s'annule en a.

exemple : une primitive de $\ln(x)$ est donc $F(x) = \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$. On peut calculer cette intégrale par parties en primitivant 1 et en dérivant $\ln(t)$, ce qui amène à
$F(x) = [t\ln(t)]_1^x - \int_0^x t/t\ \mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1$.

généralisation :

si f est une fonction continue sur un intervalle I, si $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions dérivables et à valeurs dans I, alors (règle de dérivation des fonctions composées) la fonction $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ a pour dérivée $v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

exemple : si $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, alors $f'(x) = 2xe^{-x^4}$.

Intégrales à paramètres

définition :

si $f(x, t)$ est une fonction de deux variables, si $[a, b]$ est un intervalle (a ou b pouvant être infinis), on peut définir une fonction par l'intégrale à paramètre $g(x) = \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$.

Dans le calcul d'intégrale, x est constant et on intègre en t. Mais si on considère ensuite toutes ces valeurs pour tous les x, on obtient une fonction g.

remarque : ici encore plus que dans le reste de ce cours, on oublie toute rigueur mathématique, sur la régularité et autres propriétés des fonctions considérées : dans les contextes de physique où vous croiserez ces méthodes...vous considèrerez que les bonnes hypothèses seront là.

exemple : si $f(x) = \int_0^1 e^{-tx}\mathrm{d}t$, calculer $f(x)$

Intégrales à paramètres : limites

limite d'une intégrale à paramètre :

si pour chaque valeur de $t \in [a, b]$, quand x tend vers l (l peut être fini ou infini), $f(x, t)$ tend vers une valeur $u(t)$,
alors la fonction $g(x) = \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$ tend vers $\int_a^b u(t)\mathrm{d}t$ quand x tend vers l.

Autrement dit, "la limite de la l'intégrale est l'intégrale de la limite".

Par exemple, si on prend la fonction $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\mathrm{d}t$: pour n'importe que t fixé, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}$ tend vers 0.
Par conséquent la limite en $+\infty$ de $g(x)$ est l'intégrale de la limite de $g(x)$ en $+\infty$, soit $\int_0^1 0\mathrm{d}t = 0$:
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (on n'a pas pour autant calculé d'expression explicite, sans signe intégrale, de g)

Intégrales à paramètres : dérivées

dérivation d'une intégrale à paramètre :

si $f(x,t)$ est une fonction de deux variables, si $[a,b]$ est un intervalle (a ou b pouvant être infinis), la fonction $g(x) = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ est dérivable et on a $g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Autrement dit, "la dérivée de la fonction définie comme un intégrale à paramètre est l'intégrale de la dérivée".

On reprend la fonction $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\mathrm{d}t$: déterminer une expression de $g'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

Transformée de Laplace

Un exemple d'usage fréquent de fonctions définies par des intégrales "à paramètres" est la

transformée de Laplace :

la transformée de Laplace d'une fonction f est définie pour $p > 0$ par $L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$.

exemple 1 : la transformée de Laplace de la fonction constante égale à 1 vaut $L(1)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\mathrm{d}t = [-e^{-pt}/p]_{t=0}^{t=+\infty} = 1/p$

exemple 2 : la transformée de Laplace de la fonction exponentielle vaut

$$L(\exp)(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Transformée de Laplace

exemple 3 : détermination de la transformée de Laplace de la fonction sinus.
Comme $\sin(t)$ est la partie imaginaire de e^{it},
$L(\sin)(p) = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{it}\mathrm{d}t = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-p+i)t}\mathrm{d}t =$
$$\mathrm{Im}([\frac{e^{(-p+i)t}}{-p+i}]_{t=0}^{t=+\infty}).$$
Comme la limite en $+\infty$ de e^{-pt} vaut 0 ($p > 0$) et que e^{it}, de module 1, est borné, on en déduit que
$$L(\sin)(p) = \mathrm{Im}(0 - \frac{1}{-p+i}) = \mathrm{Im}(-\frac{-p-i}{(-p)^2 - i^2}) = \frac{1}{p^2+1}.$$

exemple 4 : transformée de Laplace d'une dérivée : déterminer $L(f')(p)$ en fonction de $L(f)(p)$.

Transformée de Fourier

On rencontre aussi la

transformée de Fourier :

la transformée de Fourier d'une fonction f est définie par $TF(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$.

(selon le contexte d'utilisation, d'autres définition proches existent)

exemple : calcul de la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-a|t|}$.
C'est la fonction définie par $TF(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$.

On peut par relation de Chasles en 0 séparer l'intégrale en deux, sur $\mathbb{R}_+$, $|t| = t$, et sur $\mathbb{R}_-$, $|t| = -t$, donc $TF(f)(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{(-i\omega-a)t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} e^{(-i\omega+a)t}\mathrm{d}x$.

On peut alors primitiver chaque exponentielle :

$$TF(f)(\omega) = [\frac{e^{(-i\omega-a)t}}{-i\omega-a}]_0^{+\infty} + [\frac{e^{(-i\omega-a)t}}{-i\omega+a}]_{-\infty}^{0}.$$

La limite en les infinis des primitives est nulle, et il ne reste que les valeurs en 0 :

$$TF(f)(\omega) = \frac{-1}{-i\omega-a} + \frac{1}{-i\omega+a}.$$

Après simplifications on trouve $TF(f)(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

gradient : définition

gradient

Si $F(x, y, z)$ est une fonction à valeurs réelles, son **gradient** est le vecteur

$$\vec{\text{grad}}(F) = \vec{\nabla}(F) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}.$$

$\vec{\nabla}$ (prononcer « nabla ») étant l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

exemple : calculer le gradient de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

gradient : lien avec les courbes et surfaces

lien avec les surfaces

Si $F(x, y, z)$ est une fonction, et k une constante, $F(x, y, z) = k$ est l'équation d'une surface S.

Alors $\vec{\text{grad}}(F)$ est un vecteur normal (au point (x, y, z) à toute surface d'équation $F(x, y, z) = k$, et il est dirigé dans le sens des F croissants.

exemple 1 : si a, b, c sont des réels non tous nuls et d un réel, si $F(x, y, z) = ax + by + cz$, alors l'équation $F(x, y, z) = k$ est l'équation d'un plan.

On retrouve un résultat connu : $\vec{\text{grad}}(F) = (a, b, c)$ est un vecteur normal à ce plan.

exemple 2 : si $R > 0$, si $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $F(x, y, z) = R^2$ est l'équation de la sphère de centre O et de rayon R.

Alors $\vec{\text{grad}}(F) = (2x, 2y, 2z) = 2\vec{OM}$ est un vecteur normal à la sphère en le point $M(x, y, z)$.

divergence

divergence

Si $\vec{A}$ est un champ de vecteurs, $\vec{A} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$, sa **divergence** est le réel

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

exemples : calculer la divergence des champs $\vec{A}_1 = \vec{i} + \vec{j}$,
$\vec{A}_2 = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$,
$\vec{A}_3 = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$.

flux d'un champ de vecteur à travers une surface

Par définition, le **flux sortant** d'une surface S est $\phi = \int\int_S \vec{A}.\vec{dS}$,
$\vec{dS}$ étant le **vecteur surface élémentaire** : en tout point, c'est le vecteur de norme dS, orthogonal à l'élément de surface et orienté vers l'extérieur.

Et on appelle **flux élémentaire** la quantité infinitésimale $d\Phi = \vec{A}.\vec{dS}$, de sorte que $\phi = \int\int_S d\Phi$.

Physiquement : si dV est le volume élémentaire autour d'un point donné, délimité par une surface élémentaire dS, alors $d\Phi = \text{div}(\vec{A})\, dV$.
Ainsi la divergence mesure dans quelle proportion le champ « diverge », « sort » d'un point de l'espace, puisque le flux élémentaire est le produit de cette divergence par le volume élémentaire.

Si la divergence est partout nulle, on dit que le champ est **conservatif**.

flux d'un champ de vecteur à travers une surface

formule de Green-Ostrogradsky

Si S est une surface fermée dont le volume intérieur est V, on peut donc calculer le flux d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ sortant de S par la **formule de Green-Ostrogradsky** (ou **formule de la divergence**) :

$$\int\int_S \vec{A}.d\vec{S} = \int\int\int_V \mathrm{div} A \, dV.$$

Ce théorème justifie l'appelation flux conservatif pour qualifier un champ de vecteurs de divergence nulle : en effet dans ce cas, le flux sortant de toute surface fermée est nul. C'est le cas du champ magnétique $\vec{B}$.

divergence : exemple

exemple : On considère le champ $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{OM}$ sur une boule de centre O et rayon R. Alors $\text{div}(\vec{A}) = 3$.

On a défini $\vec{dS}$ comme le vecteur normal à la sphère, dirigé vers l'extérieur, de norme dS.
C'est donc le vecteur $\vec{dS} = \dfrac{\vec{OM}}{OM} dS$, soit $\vec{dS} = (x, y, z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS$.

Donc ici, $\vec{A}.\vec{dS} = \vec{OM}.\vec{OM}/OMdS = RdS$ (si le point M est sur la sphère de centre O et rayon R, $OM = R$).

Ainsi la relation de Green-Ostrogradsky se résume à $RS = 3V$, qui est bien vérifiée si on connaît la surface et le volume intérieur de la sphère.

Laplacien : définition

On peut à l'aide de la divergence définir le :

Laplacien

Le Laplacien d'une fonction $F(x, y, z)$ est

$$\Delta F = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}}(F)) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Le laplacien est la divergence d'un gradient : il mesure donc la dispersion d'un champ dérivant d'un potentiel à partir des dérivées secondes de ce potentiel.

Laplacien : équation de la chaleur

Le Laplacien permet d'écrire **l'équation de la chaleur**

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T,}$$

où T désigne la température, t le temps, et D la diffusivité thermique du milieu.

Pour illustrer cette équation, on considère une barre conductrice de chaleur dont une extrémité est en contact avec une source froide et l'autre avec une source chaude.
Il existe alors un gradient de température $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$ qui indique la direction dans laquelle la température croît : le gradient est orienté de la source froide vers la source chaude.
Et le Laplacien est la divergence de ce gradient.
Ainsi :

- en un point où le laplacien est nul, il entre autant de chaleur qu'il n'en sort, et la température ne bouge pas ;
- en un point où le laplacien est strictement positif, il entre plus de chaleur qu'il n'en sort et la température croît ;
- en un point où le laplacien est strictement négatif, il sort plus de chaleur qu'il n'en rentre et la température décroît.

rotationnel : définition

rotationnel

Si $\vec{A}$ est un champ de vecteurs, $\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, son **rotationnel** est le vecteur

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\,\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\,\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,\vec{k}.$$

Si le champ est une vitesse, son rotationnel correspond au vecteur-rotation d'un élément infinitésimal placé dans ce champ.

exemple : calculer le rotationnel des champs $\vec{A_1} = \vec{i} + \vec{j}$,
$\vec{A_2} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$,
$\vec{A_3} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$.

relations utiles

f et g désignent des champs scalaires, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ des champs de vecteurs.

On a :

$$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A})) = 0$$

$$\mathrm{div}(f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}(\vec{A}) \; + \; \vec{A}.\vec{\mathrm{grad}}(f)$$

$$\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) \; - \; \vec{A}.\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})$$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}(f)) = \vec{0}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}(f\vec{A}) = f\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) \; - \; \vec{A} \wedge \vec{\mathrm{grad}}(f)$$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{A})) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{A})) \; - \; \Delta\vec{A}$$

$$\vec{\mathrm{grad}}(fg) = f\,\vec{\mathrm{grad}}(g) \; + \; g\,\vec{\mathrm{grad}}(f)$$

$$\Delta(fg) = f\,\Delta g \; + \; 2fg \; + \; g\,\Delta f$$

relations utiles

$$\int f.\vec{dl} = -\int\int_S \vec{\text{grad}}(f) \wedge \vec{dS}$$

$$\int\int_S f.\vec{dS} = \int\int\int_V \vec{\text{grad}}(f).dV$$

$$\int\int_S \vec{B} \wedge \vec{dS} = -\int\int\int_V \vec{\text{rot}}(\vec{B}).dV$$

Les champs électro-magnétiques $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont entièrement décrits par les quatre équations de Maxwell :

$$\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0 \text{ où } \rho \text{ est la densité volumique de charge,}$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0,$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ où } \vec{J} \text{ est le vecteur densité de courant.}$$