BUT2 Mesures Physiques, Grenoble - proba, stats, métrologie S3

- Cours-TD : 15 séances de 2h
  groupe TM1 : François-Régis Orthous-Daunay *frod@univ-grenoble-alpes.fr*
  groupe TM2 : Christelle Viardot *Christelle.Viardot@univ-grenoble-alpes.fr*
  groupe TM3 : Guillaume Laget *guillaume.laget@univ-grenoble-alpes.fr*

- Les TD corrigés ainsi que ce poly sont sur maths.tetras.org

- Deux ou trois tests contrôle continu en TD, portant sur le cours les exercices : coef.1 pour la moyenne des tests

- Un DS de 1h30 (feuille A4 manuscrite recto-verso et calculatrice autorisées, table des lois fournie) : coef.2

- Contenu : régressions linéaires ; rappels de métrologie ; rappels de probabilités + compléments sur les lois normale et de Poisson.
  Applications aux statistiques (estimation de paramètres, tests d'hypothèses).
  Métrologie.

un exemple

série statistique double : n mesures de deux quantités x et y : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Sont-elles reliées ?

exemple 1 : On mesure simultanément le courant et l'intensité aux bornes d'une résistance. On obtient les valeurs :

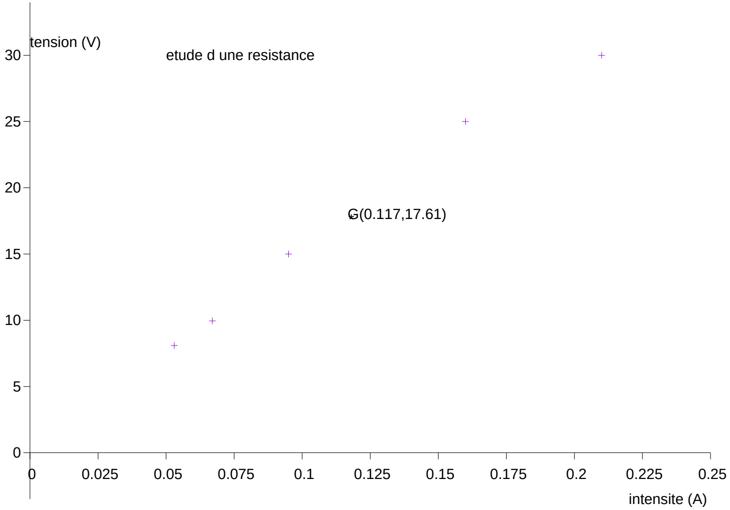
intensité en ampères	0.053	0.067	0.095	0.16	0.21
tension en volts	8.1	9.95	15	25	30

On peut représenter ces mesures par un **nuage de points** $M_i(x_i, y_i)$.

Le point $G(\bar{x}, \bar{y})$ est appelé **point moyen**.

Ici, on trouve pour point moyen $G(\bar{x} = 0.117, \bar{y} = 17.61)$.

exemple



tension (V)
etude d une resistance
G(0.117,17.61)
30
25
20
15
10
5
0
0
0.025
0.05
0.075
0.1
0.125
0.15
0.175
0.2
0.225
0.25
intensite (A)

moindres carrés, le principe

Le graphe montre une relation linéaire entre les valeurs x du courant et y de la tension : on peut espérer écrire de manière « presque » exacte $y = ax + b$.

Comment choisir les « meilleurs » a et b ?

Tracer à la main une droite, puis lire son équation ? Il y a une méthode plus calculatoire et systématique, la **méthode des moindres carrés** :

Pour un nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ et une droite $D : y = ax + b$, on peut exprimer le fait que la droite D passe au plus près des points M_i par le fait que la somme des carrés des écarts d'ordonnée $y_i - (ax_i + b)$ (écart entre le y_i mesuré et le point de la droite de même abscisse) soit le plus petit possible.

On souhaite donc trouver a et b tels que la quantité $\sum_{i=1}^{n}((ax_i + b) - y_i)^2$ soit minimale. Il s'agit d'un exercice de recherche de minimum.

moindres carrés, démonstration

$\sum_{i=1}^{n}((ax_i + b) - y_i)^2$ est une fonction continue de deux variables (a, b), positive et à valeurs réelles. Elle tend vers 0 à l'infini : elle doit avoir un minimum.
De plus elle est dérivable : en ce minimum, les dérivées partielles s'y annulent.

On doit donc avoir, en calculant ces dérivées partielles :

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b - y_i) = 0$$

et

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0,$$

soit encore

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$$

et

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

moyennes, variances : définitions et calculs

Rappelons et calculons pour cet exemple quelques quantités usuelles en statistiques :

- les valeurs moyennes : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0.117$ et $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 17.61$,
- les écarts-types : $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = 0.0593$ et $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}} = 8.53$.
- les variances sont les carrés des écarts-types, σ_x^2 et σ_y^2.
- Si dans σ_x^2 on développe les termes $(x_i - \bar{x})^2$ on obtient : $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2 - \sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n}$, soit en séparant en 3 termes : $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} + n\bar{x}^2/n - 2\bar{x}^2$

  La variance peut ainsi se calculer par $\sigma_x^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$: la variance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne
  (et de même $\sigma_y^2 = \bar{y^2} - \bar{y}^2$)

covariance

la **covariance** de la série des (x_i, y_i) est

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

On peut développer l'expression définissant la covariance
$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \bar{x}y_i - \bar{y}x_i + \bar{x}\bar{y}) =$
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$, et ainsi :

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad - \quad \bar{x}\bar{y}.$$

(la covariance est la moyenne des produits moins le produit des moyennes)

En utilisant l'une ou l'autre de ces formules, on trouve $\sigma_{x,y} = 0.503$.

moindres carrés, démonstration

On va utiliser ces moyennes, écart-types et covariance pour reformuler les conditions de minimum. En divisant par n les deux équations on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\bar{x} & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a\bar{x} + b & = & \bar{y} \end{array}\right.$$

que l'on résoud en enlevant $\bar{x}$ fois la deuxième ligne à la première :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2) & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y} \\ a\bar{x} + b & = & \bar{y} \end{array}\right.$$

On reconnait dans la première équations les expressions de la variance $\overline{x^2} - \bar{x}^2$ et de la covariance déjà étudiées.

Ainsi le coefficient directeur de la droite des moindres carrés (droite de régression) est

$$a = \frac{\sigma_{x,y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2},$$

et l'ordonnée à l'origine de cette droite est

$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

moindres carrés verticaux, moindre carrés horizontaux

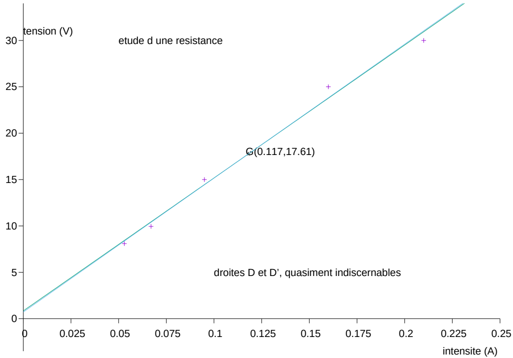
On vient de trouver la droite qui minimise la somme des carrés des distances verticales entre un point mesuré et le point de même abscisse de la droite. C'est la régression linéaire la plus habituelle.
Ici, c'est la droite D d'équation $y = 143.31x + 0.8428$.

Mais on pourrait aussi chercher à minimiser la somme des carrés des distances horizontales entre un point mesurée et le point de même ordonnée de la droite.
Il suffit d'intervertir le rôle des x et des y dans les formules ci-dessus, pour obtenir la **droite de régression de** x **en** y D' : $x = a'y + b'$ passant par G et de coefficient $a' = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_y^2}$.
Ici c'est la droite D' d'équation $x = 6.927 \times 10^{-3}\ y - 0.00498$, soit
$y = 144.36x + 0.719$.

Voyons la représentation de ces droites dans notre exemple :

retour à l'exemple

On trace les 2 droites de régression à côté des points de mesures :



On constate sur cet exemple que les deux droites sont quasiment indiscernables, et la loi théorique $U = RI$ (soit ici $y = Rx$) semble a peu près vérifiée, avec une valeur de R proche de 143 ou 144 Ω, et de faibles ordonnées à l'origine (voir plus loin pour cette question).

coefficient de corrélation

Un outil numérique permet d'estimer si deux séries de mesures sont liées ou pas par une relation linéaire : le **coefficient de corrélation**

$$r = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

r est toujours compris entre -1 et 1.
S'il vaut ± 1, les droites D et D' sont confondues, et plus il est proche de ± 1, plus les points (x_i, y_i) semblent alignés.

Ici, $r = 0.994$. En pratique, on commence à considérer une valeur $|r| > 0.7$ comme significative d'une corrélation linéaire.

remarque 1 : le fait que r soit petit n'indique pas qu'il n'y a aucune corrélation entre les variables, mais seulement qu'il n'y a pas de corrélation **linéaire**. Pour des relations du type $y = 1/(ax + b)$, $y = kc^x$, $y = kx^c$, ... ce qui précède est inadapté. Mais il suffit d'un changement de variable pour se ramener au cas linéaire.

remarque 2 : une bonne corrélation ne signifie pas qu'il existe une relation de cause à effet entre deux phénomènes ; une étude physique plus approfondie sera nécessaire pour le savoir.

ordonnée à l'origine

Dans le cas de la résistance, si l'on connaît préalablement à l'expérience la loi d'Ohm, on sait que la relation à chercher est du type $U = RI$, et l'on peut souhaiter simplement déterminer le meilleur coefficient R correspondant aux mesures, avec une relation sans terme constant.

Si l'on recherche une relation de la forme $y = ax$, on prendra alors la valeur

$$a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}.$$

Dans cet exemple, $\sum_i x_i^2 = 0.086023$ et $\sum_i x_i y_i = 12.82095$, d'où $a \simeq 149.04\Omega$.

Le choix entre ces deux méthodes dépendra des circonstances : dans cette expérience, le fait qu'une régression linéaire « classique » ne donne pas $b = 0$ peut s'expliquer par le fait que la résistance n'est pas une résistance « pure » (le terme b ayant alors une signification physique) ou bien par le fait qu'une ou plusieurs mesures sont peu précises.

quelques formules de dénombrement

- Nombre de manières de placer Amandine, Bertrand et Cécile sur un banc ?

  Permutations : il y a $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ manières d'ordonner n éléments

- Urne avec 10 numéros, 3 tirages avec remise, nombre de tirages (ordonnés) possibles ?

  ***p*-listes** : le nombre de manières de fabriquer une liste (ordonnée) de n-éléments tous compris entre 1 et p est p^n

quelques formules de dénombrement

- 10 candidats à une épreuve sportive, combien de podiums possibles ?

Arrangements : le nombre de manières de classer p personnes choisies parmi n est

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- 10 candidats pour trois postes identiques, combien de recrutements possibles ?

Combinaisons : le nombre de manières de choisir p éléments parmi n est

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Attention : simplifier les factorielles aux numérateur/dénominateur !

évènements, loi de probabilité

- **Expérience aléatoire**, issue, univers Ω (fini, dénombrable, non dénombrable)
- **Évènement** A : partie de Ω (évènement élémentaire : partie à un élément)
- Évènement contraire $\bar{A}$, union ("ou"), intersection ("et")
- Évènements **incompatibles** : si $A \cap B = \emptyset$

- **Probabilité** : $p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ telle que
  $$p(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) \text{ si } A, B \text{ incompatibles}$$
  Conséquences :
  - $0 \leq p(A) \leq 1$ pour tout événement A
  - $p(\emptyset) = 0, \quad p(\Omega) = 1$
  - $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ pour tout événement A
  - $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$ pour tous événements A, B

- Si des évènements sont **indépendants** : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (voir plus loin)

- On parle d'espace probabilisé (Ω, p)

- **Univers finis** : $p(A) = p(a_1) + \ldots + p(a_n)$ **équiprobabilité** : $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$

- **Univers continus** : fonction densité, on remplace les sommes par des intégrales, les événements élémentaires par les segments

exemples élémentaires

- **Dé équilibré à 6 faces**
  $A =$ « obtenir un nombre impair »,
  $B =$ « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 » :

  $$p(A) = 1/2 \quad , p(B) = 2/3 \quad , p(A \cap B) = 1/3 \quad , p(A \cup B) = 5/6$$

- **Radioactivité**
  Probabilité que n atomes se désintègrent en une durée t : $\quad p_n = \dfrac{\Lambda^n t^n}{n!} e^{-\Lambda t}$

  $p($« moins de 3 atomes se désintègrent » $) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$
  $p($« au moins 10 atomes se désintègrent »$) = 1 - (p_0 + ... + p_9)$

- **Proba uniforme sur** $[0, 1]$
  fonction densité ?

  $$p(\mathbb{R}) = 1 \quad , p([0,1]) = 1 \quad , p([-1/2, 2/3]) = 2/3$$

  $$p(0) = p(1/2) = p(5) = 0$$

- **Remarque :** pas de proba uniforme sur un ensemble infini discret

exercice

Une femme est enceinte de jumeaux.

Quel(s) évènement(s) est (sont) le(s) plus fréquent(s) :

1 - elle attend deux garçons ?

2 - elle attend deux filles ?

3 - elle attend un garçon et une fille ?

probabilités conditionnelles

- **Exemple :** on jette deux dés équilibrés ;
  probabilité d'obtenir une somme de 6 sachant que l'un des dés a fait un 2 ?

- Si $p(A) \neq 0$, on définit la **probabilité de B sachant A**
$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

- **Exemple :** 24 alternants sur 26 ont leur BUT, 67 non-alternants sur 72

  $p(\text{« BUT »}|\text{« Alt »}) = 24/26$, $p(\text{« BUT »}|\text{« non Alt. »}) = 67/72$
  $p(\text{« Alt. »}|\text{« BUT »}) = 24/91$, $p(\text{« non Alt. »}|\text{« BUT »}) = 67/91$

- Plus généralement, $p(A|B) = \dfrac{p(B|A)p(A)}{p(B)}$

formules

- **Formule des probabilités totales :**
  $A_1, \ldots, A_n$ incompatibles et B ne se produit que si l'un des A_i s'est produit :
  $p(B) = p(B|A_1)p(A_1) + p(B|A_2)p(A_2) + \ldots + p(B|A_n)p(A_n)$

  En particulier, pour les deux évènements A et $\bar{A}$:
  $p(B) = p(B|A)p(A) + p(B|\bar{A})p(\bar{A})$

- **Formule de Bayes :**

$$p(A_k|B) = \frac{p(A_k)p(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B|A_i)}$$

- **Exemple :** maladie rare touchant une personne sur 10000
  Un test détecte 99% des personnes infectées, avec $0,5\%$ de « faux positifs »
  Probabilité qu'une personne dont le test est positif soit effectivement malade ?

- **Évènements indépendants :** si $p(A|B) = p(A)$ ou $p(B|A) = p(B)$ ou $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

  Attention, A et B ne sont jamais incompatibles **et** indépendants, sauf si l'un est impossible

variables aléatoires

- **Variable aléatoire** : application $X : \Omega \to \mathbb{R}$
  - résultat obtenu en jetant un dé
  - mesure d'une tige métallique
  - nombre de pannes quotidiennes d'une machine
  - note à un examen
- Variable **continue** si elle prend ses valeurs dans tout un intervalle, **discrète** si les valeurs sont « isolées »
- **Fonction de répartition** de X : $F_X(x) = p(]-\infty, x[) = p(X < x)$

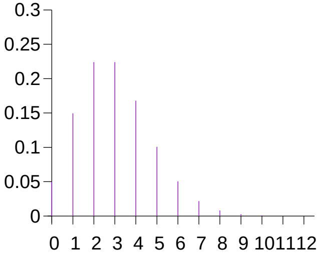
  elle est croissante, positive, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$
- $p(X \geq x) = 1 - p(X < x) = 1 - F_X(x)$

exemples de variables aléatoires discrètes

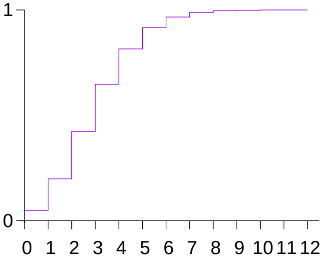
- **exemple 1 :** pile ou face, $X = 0$ si pile et $X = 1$ si face
  $p(X = 1) = 1/2$, $p(X = 0) = 1/2$

- **exemple 2 :** désintégration nucléaire
  X le nombre d'atomes désintégrés sur un intervalle de temps fixé :
  $p(X = k) = \dfrac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda}$ (où Λ nombre moyen d'atomes désintégrés sur l'intervalle)

valeurs des $p_k = p(X = k)$



fonction de répartition

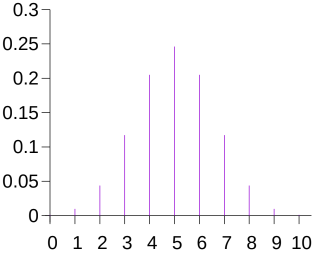


exemple de variables aléatoires discrètes

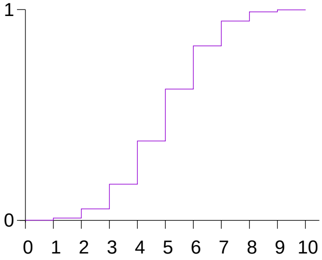
- **exemple 3 :** X nombre de résultats « face » en 10 lancers d'une pièce équilibrée ?

$$p(X = k) = \frac{\binom{10}{k}}{2^{10}}$$

valeurs des $p_k = p(X = k)$



fonction de répartition



espérance et variance

- Pour une variable X de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec probas $p_1, \ldots, p_n$:
  - **Espérance** $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots$
    et si f est une fonction : $E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots$
  - **Variance** $\mathrm{Var}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \ldots$
  - **Écart-type** $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

- **Propriétés**
  - L'espérance est linéaire : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$
  - $E(X + b) = E(X) + b$
  - $\mathrm{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$
  - $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$
  - $\mathrm{Var}(X + b) = \mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(X + b) = \sigma(X)$
  - X est dite **centrée** si $E(X) = 0$, **réduite** si $\mathrm{Var}(X) = 1$

    $$\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \text{ est centrée réduite}$$

variables aléatoires continues

Une variable continue X est caractérisée par sa fonction densité f_X plutôt que par des valeurs $p_i = p(X = x_i)$:

- La différentielle $f_X(x)\,dx$ représente $p(x \leq X < x + dx)$, et
  Les intégrales remplacent les sommes : $p(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$
- $p(X = x)$ est nulle pour tout x, et donc $p(X < x) = p(X \leq x)$
- La fonction de répartition $F_X(x) = p(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ correspond à l'aire sous la courbe entre $-\infty$ et x,

  et $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$ est l'aire entre a et b

Par exemple avec une loi normale : fonction de répartition $F_X(x)$ et probabilité $p(a < X < b)$ sont représentées par les aires grisées :

variables aléatoires continues

On retrouve les mêmes formules d'espérance et variance en remplaçant les sommes discrètes $\sum$ par des intégrales $\int$:

- **Espérance** $E(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx$
- **Variance** $\mathrm{Var}(X) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \, (x - E(X))^2 \, dx$
- **Écart-type** $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

- et les mêmes propriétés (somme, produit, ...) que dans le cas discret

couples de variables aléatoires discrètes

- X et Y variables discrètes sur un même univers : on considère le **couple** (X, Y)

  Loi de (X, Y) ou **loi conjointe** de X et Y : c'est l'ensemble des $p_{xy} = p(X = x, Y = y)$

$$p((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{xy}$$

- **Loi marginale** en X : $p(X = x) = \sum_y p(X = x, Y = y) = \sum_y p_{xy}$
  Loi marginale en Y : $p(Y = y) = \sum_x p(X = x, Y = y) = \sum_x p_{xy}$

- X et Y **indépendantes** si $p(X = x, Y = y) = p(X = x) \times p(Y = y)$ pour tous x, y

  Intérêt : la connaissance des lois marginales suffit pour connaître la loi conjointe

couples de variables aléatoires discrètes

- **Exemple :**

  4 boules indiscernables marquées 1 à 4, on en tire deux.

  X le plus petit des deux numéros, Y le plus grand.

  Loi conjointe et lois marginales ? Indépendance ?

  On présente les probabilités dans le tableau suivant :

$\downarrow X$ $\quad Y \rightarrow$	2	3	4	loi marginale en X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	0	$1/6$	$1/6$	$1/3$
3	0	0	$1/6$	$1/6$
loi marginale en Y	$1/6$	$1/3$	$1/2$	1

couples de variables aléatoires continues

- **Variables continues :** densité conjointe $f(x, y)$, qui donne les probabilités

$$p((X, Y) \in A) = \int\int_A f(x, y)\, dxdy$$

- **Lois marginales**

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \qquad \text{et} \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx$$

- **Indépendance :** si pour tous a, b, c, d,

$$p(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = p(a \leq X \leq b) \times p(c \leq Y \leq d)$$

propriétés

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- **dans le cas général,** $E(XY) = \sum_{x,y} p(X = x, Y = y)xy$
  (ou $E(XY) = \int\int f(x,y)xy\, dxdy$ pour des variables continues)
- **Si** X, Y **indépendantes,** $E(XY) = E(X)E(Y)$
  et $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$
- **Covariance** $\mathrm{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
  et **Coefficient de corrélation** $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$
- $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
  Si X et Y indépendantes, $\mathrm{cov}(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$ (**réciproque fausse !!!**)
- $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + 2ab\mathrm{cov}(X,Y) + b^2\mathrm{Var}(Y)$

retour à l'exemple

$\downarrow X$ $\quad$ $Y \rightarrow$	2	3	4	loi marginale en X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	0	$1/6$	$1/6$	$1/3$
3	0	0	$1/6$	$1/6$
loi marginale en Y	$1/6$	$1/3$	$1/2$	1

- $E(X) = 1/2 \times 1 + 1/3 \times 2 + 1/6 \times 3 = 5/3$
  $E(Y) = 1/6 \times 2 + 1/3 \times 3 + 1/2 \times 4 = 10/3$
- $E(XY) = 35/6$
- Covariance $5/18 \neq 0$, donc les variables ne sont pas indépendantes

loi de Bernoulli

- **Épreuve de Bernoulli** : « succés/échec » de probas p et $q = 1 - p$
- X vaut 1 en cas de succés, 0 en cas d'échec : $p(X = 0) = 1 - p$, $p(X = 1) = p$
- La loi de X est appelée **loi de Bernoulli** de paramètre p
- $E(X) = p(X = 0) \times 0 + p(X = 1) \times 1 = p$
- $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1 - p)$

loi binomiale

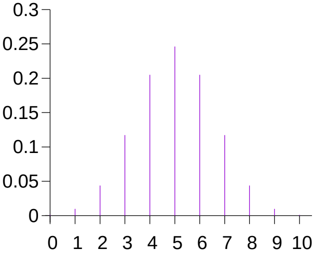
- **Schéma de Bernoulli** : on répète n épreuves de Bernoulli identiques indépendantes de même paramètre p,
- alors la variable $X =$ « nombre de succés » suit une **loi binomiale** de paramètres n et p
- Pour tout k entre 0 et n, $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- $E(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
- **Exemple 1 :** 5% de chances d'être admis à un concours, sur 40 candidats, espérance et variance du nombre d'admis ?
  on trouve une loi binomiale de paramètres $n = 40$, $p = 0.05$, espérance 2, variance 1.90, écart-type 1.38

loi binomiale : exemple

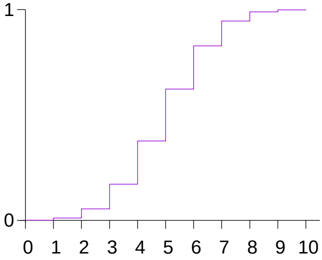
- **Exemple 2 :** nombre de « face » en 10 lancers d'une pièce équilibrée ?

$$p(X = k) = \frac{\binom{10}{k}}{2^{10}}$$

valeurs des $p_k = p(X = k)$



fonction de répartition



loi de Poisson : définition

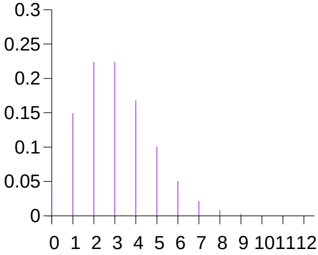
- **Loi de Poisson ou « loi des événements rares »,**
  si l'on a des événements indépendants, non simultanés, en nombre moyen Λ constant sur une unité de temps fixée,

  alors la variable aléatoire $X =$ « nombre d'événements durant l'unité de temps » suit une **loi de Poisson de paramètre** Λ , telle que :

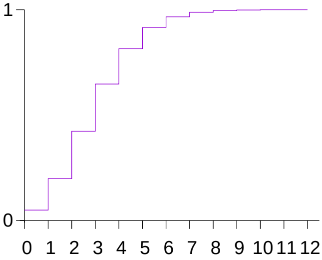
- $$p(X = k) = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} \qquad E(X) = \Lambda \qquad \mathrm{Var}(X) = \Lambda$$

- Exemple pour $\Lambda = 3$:

Valeurs des p_k



fonction de répartition



loi de Poisson : désintégration radioactive

On retrouve la loi de Poisson dans l'étude de la radioactivité.
À partir de trois propriétés expérimentales :

- le nombre moyen de désintégrations durant l'intervalle vaut Δt : $\lambda \Delta t$, où λ est une constante,
- deux désintégrations ne sont jamais simultanées,
- les désintégrations indépendantes,

on peut voir que la probabilité qu'un atome se désintègre durant $[t, t + \mathrm{d}t]$ vaut : $\lambda \mathrm{d}t$, et alors calculer les $p_k(t)$, proba que k atomes se désintègrent sur $[0, t]$

En effet : $p_0(t + \mathrm{d}t) = p_0(t)(1 - \lambda \mathrm{d}t)$ (pour observer 0 désintégration entre 0 et $t + \mathrm{d}t$ il faut n'en avoir pas observé entre 0 et t PUIS non plus entre t et $t + \mathrm{d}t$), donc $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$.
En résolvant l'équation différentielle : $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ (car $p_0(0) = 1$)

De même si $k > 0$, $p_k(t + \mathrm{d}t) = p_k(t)(1 - \lambda \mathrm{d}t) + p_{k-1}(t)\lambda \mathrm{d}t$, donc $p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t)$.
Si p_{k-1} est connu, on peut donc calculer p_k.

Ainsi $p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

et de même, par récurrence, pour tout k on a $p_k(t) = \dfrac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}$.

On retrouve bien une loi de Poisson de paramètre λt.

loi de Poisson : un autre exemple

Exemple type : un standard téléphonique reçoit en moyenne 10 appels par heure, donc $10 \times 5/60$ par période de 5 minutes, $10/4$ par période de 15 minutes, ...

- probabilité pour qu'en une heure il reçoive exactement 2 appels ?

$$\frac{e^{-10}10^2}{2!} \simeq 0,23\%$$

- probabilité pour qu'en 5 minutes il reçoive exactement 3 appels ?

$$\frac{e^{-5/6}(\frac{5}{6})^3}{3!} \simeq 4,2\%$$

- probabilité pour qu'en 15 minutes, il reçoive au moins 2 appels ?

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) =$$
$$1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - e^{-5/2} - e^{-5/2}(\tfrac{5}{2}) \simeq 71,3\%$$

- probabilité pour qu'en une heure, il reçoive au plus 8 appels ?

on trouve $33,28\%$, sans calculs !

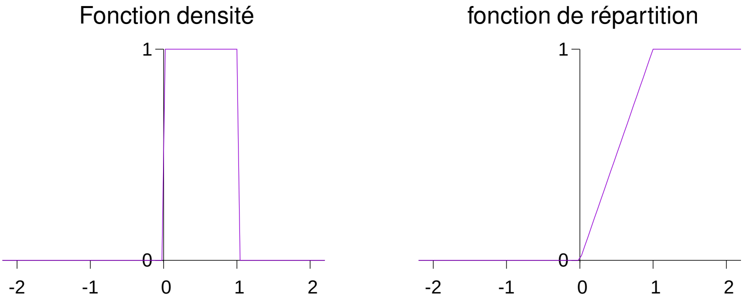
table de la loi de Poisson

$p(X \leq 8)$ si $X \sim P(10)$?

k	$\Lambda = 10$ $p(X = k)$	$p(X \leq k)$
0	0.0	0.0
1	0.0005	0.0005
2	0.0023	0.0028
3	0.0076	0.0103
4	0.0189	0.0293
5	0.0378	0.0671
6	0.0631	0.1301
7	0.0901	0.2202
8	0.1126	0.3328
9	0.1251	0.4579
10	0.1251	0.583
11	0.1137	0.6968
12	0.0948	0.7916
13	0.0729	0.8645
14	0.0521	0.9165

loi uniforme : définition

Exemple : **loi uniforme sur** $[0, 1]$



loi uniforme : fonction de répartition

X suit une loi uniforme sur $[a;b]$ si
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases},$$

alors
$$E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \qquad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

loi normale : définition

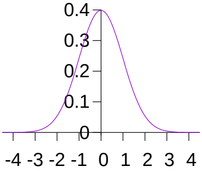
- **Loi normale** : elle apparaît fréquemment en physique, directement ou comme loi limite pour d'autres lois

- Si X suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ de paramètres $E(X) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, alors sa fonction densité est $f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

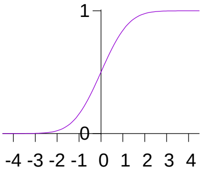
- Le calcul exact de sa fonction de répartition, $F_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\, dt$ est impossible ; on utilise des tables ou une calculatrice/un ordinateur

- **Loi normale** $N(0, 1)$:

fonction densité



fonction de répartition



loi normale : impact graphique de l'espérance et de la variance

$(\mu = -2, \sigma = 2)$ $(\mu = 0, \sigma = 1)$ $(\mu = \frac{5}{2}, \sigma = \frac{1}{2})$

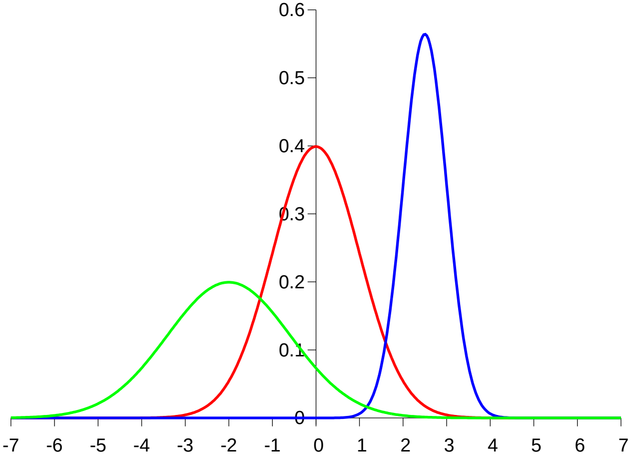


table de la loi normale centrée réduite

La table suivante donne les $p(Z < z)$ pour les valeurs de z entre 0 et 4 :

	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

loi normale : utilisation de la table

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, calcul de valeurs approchées des $p(X < x)$:
on se ramène à la variable $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ et sa table,
en remarquant que $p(X \leq b) = p(\ Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\ )$,
puis les $p(Z < z)$ sont directement lus dans la table de la loi normale centrée réduite Z

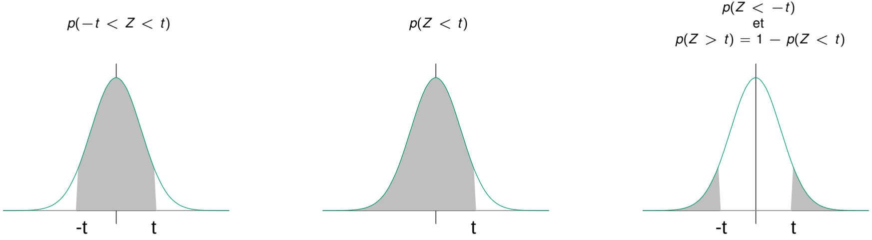
Exemple : si $X \sim N(1,4)$

- $p(X \leq 3)$? c'est $p(\dfrac{X-1}{2} \leq 1)$, soit 0.8413
- $p(X > 2)$? c'est $p(\dfrac{X-1}{2} > 1/2) = 1 - p(\dfrac{X-1}{2} < 1/2) = 0.3085$
- $p(-2.5 < X \leq 3)$? c'est $p(-1.75 < \dfrac{X-1}{2} < 1) = p(-1.75 < Z < 1) =$
  $p(Z < 1) - p(Z < -1.75) = 0.8413 - (1 - p(Z < +1.75)) =$
  $0.8413 - 1 + p(Z < 1.75) = 0.8413 - 1 + 0.9599 = 0.8012$
- α tel que $p(X \leq \alpha) = 50\%$? (α médiane !)
  $p(\dfrac{X-1}{2} \leq \dfrac{\alpha-1}{2}) = 50\%$, donc $\alpha - 1 = 2 \times 0$, $\alpha = 1$ (médiane = moyenne)

loi normale : probabilité d'un intervalle symétrique centré sur μ

On veut évaluer la probabilité que la variable X de loi $N(\mu, \sigma^2)$ prenne ses valeurs dans un intervalle de la forme $[\mu - t\sigma, \mu + t\sigma]$:

$$\begin{aligned}
p(\mu - t\sigma < X < \mu + t\sigma) &= p(-t < \frac{X-\mu}{\sigma} < t) \\
&= p(-t < Z < t) \\
&= p(Z < t) - p(Z < -t) \\
&= p(Z < t) - 1 + p(Z < t) \\
p(\mu - t\sigma < X < \mu + t\sigma) &= 2p(Z < t) - 1
\end{aligned}$$



Cas particuliers $t = 1, 2, 3$? Les $p(Z < t)$ valent 0.8413, 0.9772 et 0.9987. Ainsi les $p(\mu - t\sigma < X < \mu + t\sigma)$ valent respectivement 68.26%, 95.44% et 99.74%

lois normales : somme et moyenne, effet sur l'espérance et la variance

- **Produit d'une loi normale par une constante**
  si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

$$aX \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$$

- **Somme de deux lois normales**
  si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, et si X, Y **indépendantes**, alors

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- **Somme de n lois normales**
  si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables **indépendantes** de même loi $N(\mu, \sigma^2)$, alors

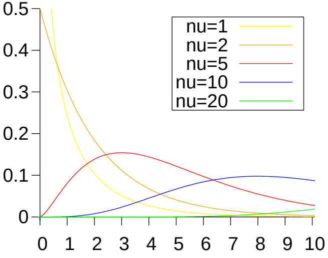
$$X_1 + \ldots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

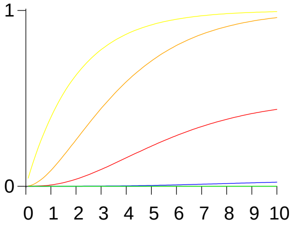
- **Moyenne de lois normales**
  si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables **indépendantes** de même loi $N(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

loi du χ^2

- Si $X_1, X_2, ..., X_\nu$ sont des variables indépendantes de loi normale centrée réduite, alors la **loi du χ^2 à ν degrés de liberté** est la loi de $\chi^2_\nu = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_\nu^2$
- Allure des fonctions densité et de répartition de la loi du χ^2 à ν d.d.l :



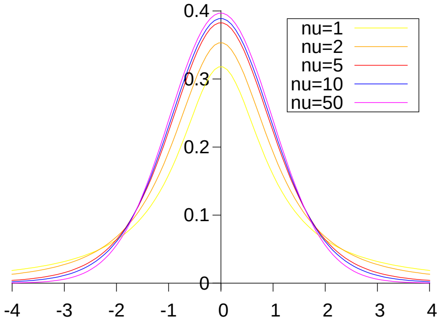


En pratique on dispose d'une table des valeurs de la fonction de répartition

- $E(\chi^2_\nu) = \nu$, $\mathrm{Var}(\chi^2_\nu) = 2\nu$
  Si ν est grand, on peut approcher χ^2_ν par une loi normale de paramètres $\mu = \nu$ et $s^2 = 2\nu$
- Utilisations : pour déterminer des intervalles de confiance pour la variance ; pour vérifier l'adéquation de valeurs expérimentales à une loi théorique (test du χ^2)

loi de Student

- Si Z suit une loi normale centrée réduite,
  si U est une variable indépendante de Z qui suit une loi du χ^2 à ν degrés de liberté,
  alors $T = \dfrac{Z}{\sqrt{U/\nu}}$ suit une **loi de Student** St_ν à ν degrés de liberté
- Allure de la fonction densité de la loi de Student à ν d.d.l :



Le graphe de la fonction densité de St_ν est une « courbe en cloche », symétrique, mais plus applatie que celle d'une loi normale centrée réduite (et d'autant plus applatie que le nombre de degrés de liberté est faible)

loi de Student

- L'espérance de la loi de Student à ν degrés de liberté est nulle si $\nu > 1$ (non définie si $\nu = 1$)

- La variance de la loi de Student à ν degrés de liberté vaut $\dfrac{\nu}{\nu - 2}$ pour $\nu > 2$) (non définie pour $\nu = 1$, infinie pour $\nu = 2$)

- On remarque que l'espérance est celle de la loi normale centrée réduite, et que la variance tend vers 1 si ν tend vers l'infini,

  Cela illustre le fait que la loi de Student tend vers la loi normale centrée réduite si le nombre de degrés de liberté tend vers l'infini : St_ν tend vers $N(0,1)$ quand ν tend vers l'infini

approximation d'une loi par une autre

- Les $p(X = k)$, $p(X < x)$ sont parfois difficiles ou longs à calculer $\longrightarrow$ tables

- Pour limiter le nombre de tables
  - $B(n, p)$: il faut autant de tables que de valeurs de n et p
  - $P(\Lambda)$: il faut autant de tables que de valeurs de Λ
  - $N(\mu, \sigma^2)$: une seule table suffit car tout se ramène à la loi normale centrée réduite !

- On cherche à approcher une loi par une autre "plus simple" : loi binomiale par une loi de Poisson ou normale, loi de Poisson par une loi normale

approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

- p petit : événement rare, et espérance np et variance $np(1-p)$ proches
  $\longrightarrow$ on remplace $B(n,p)$ par $P(np)$ si $n \geq 30$, $p \leq 0.1$, $np \leq 5$

- **Exemple :** 40 candidats, 5% de chances d'être admis.
  $n = 40 > 30$, $p = 0,05 < 0.1$, $np = 2 \leq 5 \quad \longrightarrow \quad$ on remplace $B(40, 0.05)$ par $P(2)$.

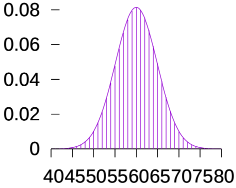
k	$p(X = k)$ pour $B(40, 0.05)$	$p(X = k)$ pour $P(2)$
0	0.1285	0.1353
1	0.2706	0.2707
2	0.2777	0.2707
3	0.1851	0.1804
4	0.0901	0.0902
5	0.0342	0.0361
6	0.0105	0.0120
7	0.0027	0.0034
8	0.0006	0.0009
9	0.0001	0.0002
10+	0.0000	0.0000

et, par exemple, $p(X \leq 5) \simeq 0.9834$ (valeur exacte 0.986..)

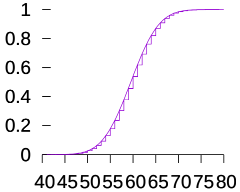
approximation d'une loi binomiale par une loi normale

- Si p n'est pas petit, $B(n, p)$ approchée par $N(np, np(1-p))$
  (Condition à vérifier : $n \geq 50$ et $np(1-p) \geq 18$)
- Mais $p(X = k) = 0$ pour une loi continue $\longrightarrow$ $p(k - 0.5 < X < k + 0.5)$
- **Exemple :** $B(100, 0.6)$ et $N(60, 24)$, graphique :

Densité et valeur des p_k



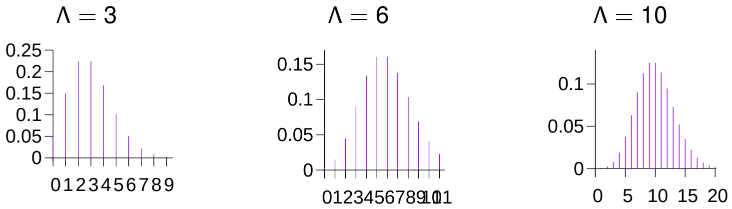
fonctions de répartition



	$B(n = 100, p = 0.6)$	$N(\mu = np = 60, \sigma^2 = 24)$	$N(\mu = np = 60, \sigma^2 = 24)$
k	$p(X = k)$	$F(k + \frac{1}{2}) - F(k - \frac{1}{2})$	$F(k + 1) - F(k)$
40-	0.0	0.0	0.0
50	0.0103	0.0102	0.0125
55	0.0478	0.0484	0.0534
60	0.0812	0.0813	0.0809
65	0.0491	0.0484	0.0434
70	0.01	0.0102	0.0082
79+	0.0	0.0	0.0

approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

- Si Λ dépasse 10 : la loi de Poisson devient symétrique



- On remplace $P(\Lambda)$ par $N(\Lambda, \Lambda)$

- et on approche $p(X = k)$ par $p(k - 0.5 < X < k + 0.5)$
  et $p(X \leq k)$ par $p(X \leq k + 0.5)$

loi faible des grands nombres

Lien entre probabilités et statistiques :

- jeu de pile ou face : "pile" avec proba $1/2$
- on joue une fois : soit "pile", soit "face"
- on joue deux fois : pas forcément un "pile", un "face"...
- mais si f est la fréquence de "pile", si le nombre de tirages augmente, f tend vers $1/2$

Énoncé de la **loi faible des grands nombres** :

Dans une expérience aléatoire, on considère un événement de probabilité p.
Si on répète l'expérience n fois en notant f_n la fréquence d'apparition du résultat, $f_n \to p$ quand $n \to +\infty$

Mais **le hasard n'a pas de mémoire**

échantillonnage

- X variable de loi connue, espérance μ, variance σ^2
- Propriétés d'un échantillon de taille n : moyenne, variance ?
- On étudie la variable $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ où les X_i sont des variables indépendantes de même loi que X
- $\bar{X}$: même espérance que X, mais variance σ^2/n
- Probabilité que les valeurs effectivement mesurées soient proches de μ ?

échantillonnage : loi normale

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

- **Exemple :** on fabrique des disques de diamètre $D \sim N(15, 0.25^2)$.

  Diamètre d'un disque au hasard ? Dans 95.4% des cas dans
  $[15 - 2 \times 0.25, 15 + 2 \times 0.25] = [14.5, 15.5]$

  On en prend 10 au hasard, diamètre moyen du lot ?
  La variance est $0.25^2/10$ soit 0.00625, l'écart-type 0.079

  $\bar{D} \sim N(15, 0.00625)$ donc dans 95.4% des cas dans
  $[15 - 2 \times 0.079, 15 + 2 \times 0.079] = [14.842, 15.158]$

  Dans 98% des cas dans $[15 - t \times 0.079, 15 + t \times 0.079]$ avec t tel que
  $2F(t) - 1 = 0.98$ soit $F(t) = 0.99$.

  On utilise la table de la loi normale : $t = 2.33$, un intervalle de confiance 98% pour le diamètre moyen d'un lot de 10 disques est
  $[15 - 2.33 \times 0.079, 15 + 2.33 \times 0.079] = [14.817, 15.183]$

échantillonnage : loi quelconque

Théorème central limite :
Si n est assez grand et si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires identiques et indépendantes, d'espérance μ et variance σ^2,

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

Exemple : on fabrique des piles dont la tension a une espérance 1.6V, un écart-type 0.1V

Tension moyenne sur un échantillon de 50 ? On peut considèrer qu'elle suit une loi $N(1.6, 0.1^2/50)$ (écart-type 0.0141) sans faire l'hypothèse que c'est le cas pour chaque tension d'une pile

échantillonnage : application aux pourcentages

- Si une proportion p de la population possède une caractéristique donnée, quelle sera la proportion de personnes à la posséder dans un échantillon de n personnes ?
- X nombre de personnes concernées dans l'échantillon : $X \sim B(n, p)$
- Pour n « grand » ($n \geq 50$ et $np(1-p) \geq 18$) : $X \sim N(np, np(1-p))$
- On s'intéresse à la fréquence $f = X/n$, soit X multiplié par $1/n$:
- l'espérance est multipliée par $1/n$, la variance par $1/n^2$,
- et ainsi $f \sim N(p, p(1-p)/n)$

échantillonnage : application aux pourcentages

Exemple : s'il y a 10% de gauchers dans la population, quelle est la probabilité d'en avoir plus de 15% parmi les 250 étudiants du département MP ?

$250 > 50$ et $250 \times 0.9 \times 0.1 > 18$ donc on peut utiliser l'approximation par une loi normale,

et écrire que la fréquence f d'apparition de la caractéristique à l'IUT suit la loi $f \sim N(0.1, 0.09/250)$,

puis en déduire que
$p(f > 0.15) = p(Z > 2.635) = 1 - p(Z < 2.64) = 1 - 0.9959 = 0.004$

échantillonnage/estimation

- **Échantillonnage** :
  on connaît la population, on veut en déduire les propriétés des échantillons.
  facile

- **Estimation** :
  on connaît un échantillon, on veut estimer les propriétés de la population.
  plus dur !

  - **Estimateur robuste** : peu sensible à de rares valeurs extrêmes
  - **Estimation sans biais** : si on fait la moyenne sur un très grand nombre d'échantillons,

    on tend vers la valeur exacte
  - Plus l'échantillon est important, plus l'estimation est bonne

estimation : deux exemples

Exemple 1 : diamètre de 300 tiges

diamètre d en mm	42	43	44	45	46	47	48
effectif	13	26	63	149	30	15	4

Exemple 2 : 5 mesures d'une tension u : en volts, 11.83, 11.91, 12.01, 12.03, 12.1

estimation : estimation ponctuelle

X variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2 inconnues,
mais on connait un échantillon de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Estimation de la moyenne : $E(X) = \mu \simeq \bar{x}$

Ici, diamètre moyen 44.73 mm, tension 11.97 V

estimation : estimation ponctuelle

Estimation de la variance : peut-on prendre

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) \quad \simeq \quad \sigma'^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \text{ ?}$$

Non : c'est un **estimateur biaisé** !

Sur un grand nombre de mesures, sur plusieurs échantillons de taille n :

moyenne des variances estimées $\longrightarrow \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$, on **sous-estime** la variance

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$ est l'estimateur non biaisé de σ^2

Ici, $\sigma' = 1.136$ mm, $s = 1.138$ mm pour le premier exemple,
$\sigma' = 0.095$ V, $s = 0.106$ V pour le second

estimation : estimations par intervalle de confiance

Problème de l'estimation ponctuelle : deux échantillons, deux valeurs de μ !

Estimation de la moyenne par des intervalles de confiance :
on veut déterminer un intervalle qui contient μ avec une probabilité maîtrisée,

pour obtenir une affirmation de la forme :

« le diamètre moyen a 95% de chances d'être dans $[44.60, 44.86]$ »

ou plutôt :

« un intervalle de confiance 95% pour le diamètre est $[44.60, 44.86]$ »

estimation : intervalle de confiance de la moyenne, cas idéal

Cas idéal : X suit une loi normale d'espérance μ et variance σ^2, avec σ connu (peu réaliste mais simple, pour commencer). On veut estimer μ à partir d'un échantillon

Plus précisément on cherche un intervalle qui ait une probabilité fixée de contenir μ

alors $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, donc $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (loi centrée réduite)

Si $t > 0$, $p(\mu - t\sigma/\sqrt{n} \leq \bar{X} \leq \mu + t\sigma/\sqrt{n}) = p(-t \leq \sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \leq t) = 2F(t) - 1$,

en soustrayant $\bar{X}$ et μ puis en multipliant par -1 :
$p(\bar{X} - t\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t\sigma/\sqrt{n}) = 2F(t) - 1$.

Ainsi, l'intervalle $[\bar{X} - t\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + t\sigma/\sqrt{n}]$ a une probabilité $2F(t) - 1$ de contenir μ

Si on veut un intervalle de confiance c fixée, il reste à trouver à l'aide de la table de la loi normale c tel que $2F(t) - 1 = c$

Ainsi dans l'exemple des tiges on peut dire que μ est dans $[44.60, 44.86]$ avec une confiance 95%, ou dans $[44.53, 44.92]$ avec confiance 99.7%

estimation : intervalle de confiance de la moyenne, cas général

Cas général : si X suit une loi normale d'espérance μ et variance σ^2, tous deux inconnus ; et si on note $\bar{X}$ la moyenne de n tirages, et s l'estimation ponctuelle de σ,

alors $\dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ suit la loi St_{n-1}, loi de Student à $n-1$ degrés de liberté

On définit $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, $U = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/\sigma^2$ et $S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}$. Alors :

- Z suit une loi normale centrée réduite
- U suit une loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté (un de moins que le nombre de variables car la somme étant nulle, on perd un degré de liberté)

si on admet que U et Z sont indépendantes, alors $T = Z/\sqrt{U/(n-1)}$ suit donc une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté (c'est la définition)

- mais on remarque que $\dfrac{U}{S^2} = \dfrac{n-1}{\sigma^2}$ est une constante ! Ainsi $U = (n-1)S^2/\sigma^2$, et en reportant dans l'expression de T on a bien :

$T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté

Comme dans l'exemple « idéal » précédent, la table de la loi de Student à $\nu = n-1$ degrés de liberté donne $t(\alpha)$ tel que

$$p(\bar{X} - t(\alpha)s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t(\alpha)s/\sqrt{n}) \quad = \quad p(-t(\alpha) \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{s} \leq t(\alpha)) \quad = \quad 1-\alpha$$

Exemples : $\alpha = 5\%$, $n = 5, 100, +\infty$?
on trouve dans la table pour $\nu = n-1 = 4$ la valeur $t(\alpha) = 2.7763$. Si $n = 100$, $\nu = n-1 = 99 \simeq 100$, donc $t(\alpha) = 1.984$, et pour $n = +\infty$, $\nu = n-1 = +\infty$, donc $t(\alpha) = 1.96$: on retrouve la loi normale

estimation : intervalle de confiance de la moyenne, cas général

En résumé :

Détermination d'un intervalle de confiance avec la loi de Student

si X suit une **loi normale** de paramètres μ et σ^2 inconnus,

si l'on dispose, à l'aide d'un échantillon d'effectif n, d'une estimation ponctuelle $\bar{x}$ pour l'espérance $\mu = E(X)$ et d'une estimation ponctuelle s pour l'écart-type σ,

alors $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X} - \mu}{s}$ suit une loi de Student à $n - 1$ degrés de liberté, et donc :

il y a une probabilité $1 - \alpha$ que l'espérance $E(X) = \mu$ soit dans l'intervalle

$$[\bar{x} \; - \; t(\alpha)\tfrac{s}{\sqrt{n}} \;\; , \;\; \bar{x} \; + \; t(\alpha)\tfrac{s}{\sqrt{n}}],$$

$t(\alpha)$ étant lu dans la table de la **loi de Student** à $n - 1$ degrés de liberté

estimation : intervalle de confiance de la moyenne, exemple

Exemple :

Mesures de tension, 11.83 V, 11.91 V, 12.01 V, 12.03 V, 12.1 V
Estimation ponctuelle de la moyenne $\bar{x} = 11.97$ V
Estimation poncutelle de l'écart-type $s = 0.106$ V

Intervalle de confiance 95% ?

Pour un risque 5%, $t(0.05) = 2.7764$, et donc l'intervalle est
$[11.97 - 2.776 \times 0.106/\sqrt{5}, 11.97 + 2.776 \times 0.106/\sqrt{5}] = [11.83, 12.10]$

(avec la loi normale on aurait
$[11.97 - 1.96 \times 0.106/\sqrt{5}, 11.97 + 1.96 \times 0.106/\sqrt{5}] = [11.88, 12.06]$, un intervalle légèrement plus petit mais faussement précis)

De même au risque 1%, $t(0.01) = 4.60$, intervalle $[11.75, 12.19]$

estimation : intervalle de confiance de la moyenne, grand effectif

Si la loi de X, la variance σ^2 et l'espérance μ sont tous inconnus,
que l'on dispose d'estimations ponctuelles pour la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type s,
à l'aide d'un échantillon d'effectif n, **avec n grand,** (supérieur à 30),
alors on peut remplacer la loi St_{n-1} par la loi $N(0, 1)$ et donc :

- L'espérance $E(X) = \mu$ est dans $[\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité de $2F(t) - 1$,
- L'espérance $E(X) = \mu$ est dans $[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité de 68%,
- L'espérance $E(X) = \mu$ est dans $[\bar{x} - 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité de 95%,
- L'espérance $E(X) = \mu$ est dans $[\bar{x} - 2\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2\frac{s}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité de 95.4%,
- L'espérance $E(X) = \mu$ est dans $[\bar{x} - 3\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 3\frac{s}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité de 99.7%

estimation d'une proportion

p proportion de présence d'une caractéristique au sein de la population.

X le nombre d'éléments d'un éhantillon de taille n qui possède cette caractéristique.
$F = X/n$ fréquence. Alors un

Estimateur ponctuel de p est la fréquence f mesurée sur l'échantillon

Si n grand ($n \geq 100$) et $0.2 \leq f \leq 0.8$), $F \simeq N(p, p(1-p)/n)$; on remplace $p(1-p)/n$ par l'estimation ponctuelle $f(1-f)/n$:

un intervalle de confiance $2F(t) - 1$ pour la valeur de p est

$$[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}]$$

estimation d'une proportion

Exemple : un sondage sur 1000 personnes prises au hasard annonce un candidat A à 52%

Proportion p réelle d'intentions de vote dans la population ?

ici $f = 0.52$ et $\sqrt{\dfrac{0.52(1-0.52)}{1000}} = 0.0158$,

donc l'intervalle de confiance 95% est $[0.52 - 1.96 \times 0.0158; 0.52 + 1.96 \times 0.0158]$ soit $[0.489, 0.551]$

De même au risque 1% : $2F(t) - 1 = 0.99$, $F(t) = 0.995$, $t = 2.57$, intervalle $[0.479, 0.561]$

Au risque 10% : $2F(t) - 1 = 0.9$, $F(t) = 0.95$, $t = 1.64$, intervalle $[0.494, 0.546]$

Intervalle au risque r commençant à 0.5 ?
$0.52 - 0.0158t = 0.5$ donne $t = 1.27$, donc $F(t) = 0.898$, $2F(t) - 1 = 0.796$...
r dépasse 20%

estimation d'une proportion - étude unilatérale

Attention : si la question est d'être élu ou pas élu, on cherche un intervalle limité à 0.5 à gauche, mais pouvant aller jusqu'à 1 (ou en pratique $+\infty$ ce qui change peu la probabilité associée) à droite

On regarde donc plutôt $p(F - 0.0158t < p)$, avec $t = 1.27$,

et non pas $p(F - 0.0158t < p < F + 0.0158t)$

Alors $p(F - 0.0158t < p) = F(1.27) = 0.898$:

on prédit que le candidat sera élu, au risque 10.2% de se tromper

estimation d'une variance par un intervalle de confiance

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$,

on souhaite déterminer un intervalle de confiance pour σ à partir d'un échantillon de taille n de tirages de la variable X

Alors si les X_i sont n variables indépendantes de même loi,
que l'on définit $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$,
la variable $(n-1)S^2/\sigma^2$ suit une loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté ($n-1$ et non n car la somme des n variables est nulle)

Ainsi si on souhaite estimer la valeur de la variance σ^2 par un intervalle de confiance, à partir d'un échantillon de n valeurs x_i :

- on fixe un risque α,
- on détermine par la loi du χ^2 à $n-1$ degrés de liberté les valeurs c_1 et c_2 telles que $p(\chi^2 < c_1^2) = \alpha/2$ et $p(\chi^2 < c_2^2) = 1 - \alpha/2$,
- l'intervalle de confiance $1 - \alpha$ cherché est alors $[(n-1)s^2/c_2^2; (n-1)s^2/c_1^2]$

tests d'hypothèses : objectif

Les mesures sur un échantillon sont-elles compatibles avec des affirmations comme :

- « le diamètre des pièces produites est de 45mm »
- « la durée de vie en fonctionnement d'un composant est supérieure à 1000h »
- « les pièces produites par les usines A et B ont la même longueur »
- « la résistance du composant suit une loi normale d'espérance 10Ω et d'écart-type 0.5Ω ».

?

tests d'hypothèse : méthode

- H_0 **hypothèse nulle,** à tester
- **risque de première espèce** $\alpha = p(''\text{rejeter } H_0'' / '' H_0 \text{ est vraie}'')$
- intervalle de confiance de risque α pour l'échantillon, en supposant H_0
- si la valeur pour l'échantillon est hors de l'intervalle, on refuse H_0

tests d'hypothèse : remarques

remarque 1 : $\beta = p(''\text{accepter } H_0'' / '' H_0 \text{ est fausse}'')$**risque de seconde espèce**

remarque 2 : pas de symétrie entre H_0 et H_1 : H_0 n'est pas prouvée par un test

test bilatéral de la moyenne

Avec un échantillon 300 disques, diamètre moyen 44.73 mm, $s = 1.296$, on veut tester une hypothèse H_0 : « les disques font $\mu = 45$ mm » au risque $\alpha = 5\%$

Il s'agit d'un **test bilatéral**, c'est-à-dire que l'on fait pas de différence entre valeurs plus faibles ou valeurs plus fortes que la valeur à tester

On cherche donc un intervalle de la forme $[\mu - ts/\sqrt{n}; \mu + ts/\sqrt{n}]$, qui si l'hypothèse est vérifiée a une probabilité $1 - \alpha$ de contenir la valeur moyenne mesurée sur un échantillon aléatoire de taille 300
Pour cela on sait qu'**il faut prendre t tel que** $2F(t) - 1 = 1 - \alpha$

Donc ici, $t = 1.96$, et si H_0 est vraie, le diamètre moyen d'un échantillon de 300 disques a 95% de chances d'être dans l'intervalle :
$[45 - 1.96 \times 1.296/\sqrt{300}, 45 + 1.96 \times 1.296/\sqrt{300}] = [44.87, 45.13]$

44.73 n'est pas dans cet intervalle : on refuse H_0
(en prenant un risque 5% de la refuser à tort)

test unilatéral de la moyenne

On teste au risque 1% un argument de vente : « la durée de vie des composants dépasse 1000h », à partir d'un échantillon de 50 composants sur lequel on mesure un durée de vie moyenne 998h, et un écart-type $s = 15.15$h

Ici on réalise **un test unilatéral**, c'est-à-dire que l'on veut s'assurer que la durée de vie ne soit pas trop basse - le fait qu'elle soit plus haute que promis n'étant pas un problème

On cherche donc un intervalle de la forme $[\mu - ts/\sqrt{n}; +\infty[$, qui si l'hypothèse est vérifiée a une probabilité $1 - \alpha$ de contenir la valeur mesurée sur un échantillon de taille n pris au hasard
Pour cela on sait qu'**il faut prendre** t **tel que** $F(t) = 1 - \alpha$

Donc pour tester $H_0 : \mu \geq 1000$ au risque $\alpha = 1\%$: avec $t = 2.33$ on sait que si H_0 vraie, $p(\mu - ts/\sqrt{50} \leq \bar{X}) = 99\%$, donc dans 99% des cas $\bar{X}$ est dans $[\mu - 2.33 \times 15.15/\sqrt{50}, +\infty[$, a fortiori dans $[1000 - 2.33 \times 15.15/\sqrt{50}, +\infty[$

L'intervalle est $[995, +\infty[$: on ne refuse pas H_0

test de comparaison de moyennes

Soit deux populations avec des variables aléatoires X_1 et X_2, d'espérances μ_1 et μ_2, de variances σ_1^2 et σ_2^2

On veut tester l'hypothèse H_0 : « $\mu_1 = \mu_2$ » à l'aide d'un échantillon de chaque population

On dispose donc d'échantillons d'effectifs n_1 et n_2, moyennes $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$, écarts-types estimés s_1 et s_2

D'après les règles sur les sommes de lois normales indépendantes et si les effectifs sont « grands » :

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$$

Exemple : $n_1 = n_2 = 40$, $\overline{x_1} = 1025\text{h}$, $\overline{x_1} = 1070\text{h}$, $s_1 = 120\text{h}$, $s_2 = 140\text{h}$

Donc si H_0 est vraie $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ a une probabilité 95% d'être dans
$[-1.96\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}\ ,\ 1.96\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}] = [-57.1, 57.1]$

Cet intervalle contient bien la valeur $1070 - 1025 = 45\text{h}$: la différence n'est pas significative, on accepte l'hypothèse que les populations sont identiques

test du χ^2

Ce test permet de tester une hypothèse portant sur la distribution de valeurs expérimentales : le fait qu'un phénomène suive une loi uniforme, une loi normale, ...

Exemple : on jette 100 fois de suite un dé à 6 faces. On obtient les résultats :

valeur	1	2	3	4	5	6
effectif	10	17	11	15	19	28

Comment tester l'hypothèse H_0 : « le dé est équilibré » ?

Il s'agit de comparer :

- un échantillon avec des valeurs et effectifs $(x_1 = 1, n_1 = 10), (x_2 = 2, n_2 = 17), \ldots$ (ou bien des fréquences : $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.17$, $f_3 = 0.11$, $f_4 = 0.15$, $f_5 = 0.19$, $f_6 = 0.28 \ldots$)
- une loi théorique (discrète et uniforme ici) $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 \simeq 0.1667$, ce qui donnerait des effectifs « théoriques » $np_i = 16.67$ pour chaque valeur

test du χ^2

Pour cela on applique la méthode suivante :

- on calcule les p_i en utilisant la loi que l'on veut tester
- on reformule l'hypothèse en H_0 : « $p_1 = \frac{n_1}{n}, \ldots, p_k = \frac{n_k}{n}$ », les effectifs constatés sont ils égaux (pas trop différents) aux effectifs « théoriques »
- on fixe un risque α
- on calcule le nombre de degrés de liberté $\nu = k - 1$ en général (ou $\nu = k - 2$ si on teste une loi binomiale, loi de Poisson ou loi normale)
- on calcule le nombre $\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}$
- dans la table du χ^2 à ν degrés de liberté on lit la valeur c^2 telle que $p(\chi^2 \geq c^2) = \alpha$

Alors : on accepte H_0 si $\chi_o^2 \leq c^2$, on refuse H_0 sinon

test du χ^2

Ici, $\chi_o^2 = \frac{6}{100}\sum_{i=1}^{6}(n_i - \frac{100}{6})^2 = \frac{6}{100}\frac{640}{3} = 12.8$

Pour $\alpha = 5\%$, $c^2 = 11.07$ dans la table du χ^2 à 5 degrés de liberté, donc on refuse H_0, en prenant 5% de risque de le refuser à tort

Pour $\alpha = 1\%$, $c^2 = 15.09$ dans la table du χ^2 à 5 degrés de liberté, donc on accepte H_0, sans maîtriser le risque de l'accepter à tort

Test du χ^2

Remarque 1 : si les effectifs théoriques np_i ne sont pas tous supérieurs à 5, regrouper plusieurs des valeurs x_i en classes d'effectifs tous supérieurs à 5

Remarque 2 : accepter H_0 ne signifie pas que l'on a trouvé la loi de X : plusieurs tests, pour des lois éventuellement très différentes, pourraient ne pas rejeter des hypothèses incompatibles entre elles

test d'indépendance

Ce test utilisant lui aussi la loi du χ^2 permet, à partir d'échantillons de mesures d'un couple (X, Y) de variables aléatoires, d'étudier leur indépendance

On dispose de mesures x_i $(1 \leq i \leq r)$ et y_j $(1 \leq i \leq s)$.

On calcule alors le nombre $n_{i,j}$ de mesures telles que $X = x_i$, $Y = y_j$.

On étudie l'hypothèse H_0 : « X et Y sont indépendantes »

Soient $l_i = \sum_{j=1}^{s} n_{i,j}$ le nombre de mesures telles que $X = x_i$
et
$c_j = \sum_{i=1}^{r} n_{i,j}$ le nombre de mesures telles que $Y = y_j$

Si les variables sont indépendantes, on doit avoir les $n_{i,j}$ proches des $N_{i,j} = \dfrac{l_i \times c_j}{n}$ (car pour des variables indépendantes $p(X = x_i, Y = y_i) = p(X = x_i) \times p(Y = y_i)$)

test d'indépendance

- On calcule donc $\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{i,j} - N_{i,j})^2}{N_{i,j}}$,
qui sera d'autant plus proche de 0 que les $n_{i,j}$ et les $N_{i,j}$ sont proches

- On lit sur la table du χ^2 à $(r-1)(s-1)$ degrés de liberté la valeur c^2 telle que $p(\chi^2 \geq c^2) = \alpha$

- Si $c^2 \geq \chi_o^2$, on accepte H_0, sinon on la refuse.

test d'indépendance

Exemple : avec 3 modèles pour 200 photocopieurs qui ont 0, 1 ou plus de 2 pannes par an, on veut tester si le nombre de pannes est indépendant du modèle.

On dispose des mesures $n_{i,j}$ suivantes et on calcule les sommes l_i et c_j sur chaque colonne et chaque ligne :

	0	1	2+	
modèle 1	13	19	25	57
modèle 2	28	29	28	85
modèle 3	24	18	16	58
	65	66	69	200

Ici $l_1 = 57$, $l_2 = 85$, $l_3 = 58$, $c_1 = 65$, $c_2 = 66$, $c_3 = 69$, et $n = 200$

On construit le tableau des $N_{i,j} = l_i \times c_j / 200$:

	0	1	2+	
modèle 1	18.5	18.9	19.7	57
modèle 2	27.6	28.1	29.3	85
modèle 3	18.9	19.1	20	58
	65	66	69	200

test d'indépendance

- Alors $\chi_o^2 = \frac{(13-18.5)^2}{18.5} + \ldots + \frac{(16-20)^2}{20} = 5.473$

- Pour $\alpha = 5\%$, la table du χ^2 à $(3-1)(3-1) = 4$ degrés de liberté donne $c^2 = 9.4877$

- $\chi_o^2 < c^2$ et par conséquent, on accepte l'hypothèse d'indépendance