

1. Deux dés

On lance deux fois un dé bien équilibré.

- Quelle est la probabilité que la somme des points soit strictement supérieure à 10 sachant que le premier résultat est 6 ?
- Quelle est la probabilité que la somme des points soit strictement supérieure à 10 sachant qu'un des résultats est 6 ?
- Sachant que la somme des points vaut 6 calculer la probabilité pour que l'un des dés ait donné un 2.

corrigé succinct :

- L'univers est ici l'ensemble des tirages dont le premier résultat est un 6, de cardinal 6 (on a six tirages possibles en tout, $(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)$).
L'événement "la somme est strictement supérieure à 10" est constitué des deux issues $(6, 5)$ et $(6, 6)$. Ainsi, la probabilité cherchée est $2/6 = 1/3$.
- Ici l'univers est constitué de tous les tirages comportant au moins un 6, soit $(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6), (1, 6), \dots, (5, 6)$, de cardinal 11 (attention, $(6, 6)$ n'apparaît qu'une seule fois).
Les tirages pour lesquels la somme est strictement supérieure à 10 sont $(6, 6), (6, 5)$ et $(5, 6)$, et la probabilité est donc $3/11$.
- On note A l'événement « l'un des dés a donné un 2 » et B l'événement « la somme des points fait 6 ».
Il s'agit de calculer $p(A|B) = p(A \cap B)/p(B)$.
Mais $A \cap B = \{(2, 4); (4, 2)\}$ est de cardinal 2, et $B = \{(1, 5); (5, 1); (4, 2); (2, 4); (3, 3)\}$ est de cardinal 5, donc la probabilité cherchée est de $2/5$.

- Deux machines M_1 et M_2 produisent quotidiennement respectivement 1000 et 3000 pièces. Le taux de pièces défectueuses est de 2% pour M_1 et de 5% pour M_2 .

Quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse provienne de M_1 ?

corrigé succinct :

On tire une pièce au hasard : on note D l'événement « la pièce est défectueuse », et M_i l'événement « la pièce provient de la machine M_i », $i = 1, 2$.

$$p(D) = \frac{0.02 \times 1000 + 0.05 \times 3000}{1000 + 3000} = \frac{17}{400}, p(M_1) = \frac{1}{4}, p(M_2) = \frac{3}{4}.$$

On sait que $p(D|M_1) = 0.02$, donc $p(D \cap M_1) = 0.02 \times p(M_1) = 0.005$. Et donc

$$p(M_1|D) = \frac{p(D \cap M_1)}{p(D)} = \frac{2}{17} \simeq 11.76\%.$$

- Une usine fabrique des composants électroniques qui fonctionnent correctement dans 98% des cas. Un test rapide en fin de chaîne élimine 95% des composants défectueux, mais élimine aussi 1% des composants conformes.

Calculer la probabilité qu'un composant éliminé soit conforme.

corrigé succinct : $p(E) = 0.95 \times 0.02 + 0.01 \times 0.98 = 0.0288$, et donc

$$p(C|E) = p(E|C) \times p(C)/p(E) = 0.01 \times 0.98/0.0288 = 0.3403,$$

la probabilité qu'un composant éliminé soit conforme est d'environ 34%.