TD 5 : Intégrales - corrigé

exercices théoriques

1. Calculer à l'aide d'une primitive :

$$A=\int_0^1 -2x+3\,dx,\qquad B=\int_0^1\frac{2dx}{x^2+1},\qquad C=\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}},$$
$$D=\int_0^{\sin\theta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad E=\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

<u>corrigé succinct :</u>

A : primitive $-x^2+3x$, $\boxed{A=2}$; B : primitive $2\arctan x$, $\boxed{B=\pi/2}$;

C : primitive $\sqrt{x^2+1}$, $\boxed{C=\sqrt{2}-1}$; D : primitive $\arcsin x$, $\boxed{D=\theta \text{ si } \theta \text{ dans } [-\pi/2;\pi/2]}$;

E : primitive $\mathrm{argch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, donc $\boxed{E=\ln(4+\sqrt{15})-\ln(2+\sqrt{3}).}$

2. Calculer à l'aide d'une (ou plusieurs) intégrations par parties :

$$A=\int_1^X \ln x\,dx,\quad B=\int_0^1 x^2e^x\,dx,\quad C=\int_0^{\pi/2}(3x^3-2x)\cos x\,dx.$$

<u>corrigé succinct :</u> A : avec $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$ on trouve $\boxed{A=X\ln X-X+1.}$

B : avec $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x^2$, on trouve $B=e-2\int_0^1 xe^x\,dx$, et une nouvelle intégration par parties donne $\boxed{B=e-2.}$

C : avec trois intégrations par parties successives, où l'on dérive le polynôme et primitive le cos ou sin, on trouve $\boxed{C=3\pi^3/8-10\pi+20.}$

3. Calculer à l'aide d'un changement de variables :

$$A=\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta,\qquad B=\int_0^x\frac{dt}{2t^2+1},$$
$$C=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\theta\ d\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta},\qquad *D=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+2}$$

(pour A on posera $x=\cos\theta$, pour B, $y=\sqrt{2}t$, et pour C, $t=\tan\frac{\theta}{2}$)

<u>corrigé succinct :</u> A : en posant $u=\cos\theta$, $du=-\sin\theta\,d\theta$, $\cos^2\theta=u^2$, et donc $A=\int_1^{\sqrt{2}/2}-u^2\,du$: $\boxed{A=\frac{4-\sqrt{2}}{12}.}$

B : en posant $y=\sqrt{2}t$ on a $dy=\sqrt{2}dt$ et $B=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}x}\frac{dy}{y^2+1}$, $\boxed{B=\frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}.}$

C : on pose $t=\tan\theta/2$. Alors $dt=\frac{1}{2}(1+t^2)d\theta$, donc $d\theta=2dt/(1+t^2)$. De plus, $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$, et donc $C=\int_{\tan\pi/8}^1\frac{1-t^2}{2t}dt$ après simplification. Ainsi, $C=\frac{1}{2}[\ln t-t^2/2]_{\tan\pi/8}^1$.

Mais si $u=\tan\pi/8$, $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2u}{1-u^2}$ donc $u=\sqrt{2}-1$, et finalement

$$\boxed{C=\frac{1-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)}{2}.}$$

D : on met le dénominateur sous forme canonique $4x^2+4x+2=4(x^2+x)+2=4[(x+1/2)^2-1/4]+2=(2x+1)^2+1$, et on peut alors choisir de poser $y=2x+1$, $\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x$ et donc $D=\int_1^3\frac{\mathrm{d}y/2}{y^2+1}=[\arctan(3)-\arctan(1)]/2$

4. Calculer à l'aide d'une décomposition en éléments simples :

$$A=\int_1^2\frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx,\qquad B=\int_0^1\frac{2x\,dx}{(x+1)(x^2+1)},$$
$$C=\int_0^1\frac{x\,dx}{(x+1)(2x^2+1)}.$$

<u>corrigé succinct :</u> A : on décompose en éléments simples $\frac{x^2+1}{x^2+x}=1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}$, donc

une primitive de la fonction intégrée sur $[1,2]$ est $x+\ln x-2\ln(x+1)$, et par conséquent $\boxed{A=1+3\ln 2-2\ln 3.}$

B : on décompose en éléments simples $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+1}$, donc une primitive de la fonction intégrée sur $[0,1]$ est $-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x$, et donc $\boxed{B=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}.}$

C : on trouve pour décomposition $\dfrac{x}{(x+1)(2x^2+1)}=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{2x^2+1}+\dfrac{1}{2x^2+1})$. Le premier terme se primitive sur $[0,1]$ en $-\ln(x+1)$, le second en $\frac{1}{2}\ln(2x^2+1)$ et le troisième en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)$ (cf.calculs par changements de variable), donc l'intégrale vaut $\boxed{C=\dfrac{1}{3}(-\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}).}$

5. Calculer à l'aide d'une linéarisation :

$$A=\int_0^{\pi/3}\sin\theta\cos\theta\ dx,\qquad B=\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\ d\theta,$$
$$C=\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\ d\theta,\qquad D=\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\ d\theta.$$

corrigé succinct : $A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sin 2\theta\ d\theta$ donc $\boxed{A=\dfrac{3}{8}.}$

On sait (revoir le cours sur les nombres complexes) que $\sin^3\theta=\frac{1}{4}(-\sin 3\theta+3\sin\theta)$, et par conséquent on calcule $\boxed{B=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5\sqrt{2}}{12}.}$

On linéarise $\cos^2\theta\ \sin\theta=\frac{1}{4}(\sin 3\theta+\sin\theta)$, donc $\boxed{C=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{12}.}$

On sait que $\cos^4\theta=\dfrac{\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3}{8}$, et donc $\boxed{D=\dfrac{3\pi}{16}.}$

(revoir la feuille de TD sur la trigonométrie)

6. Existence et calcul des intégrales généralisées :

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2},\qquad B=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}},\qquad C=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)},$$
$$D=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)},\quad E=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\ dx,\quad F=\int_0^{+\infty}re^{-r^2}\ dr,$$
$$G=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2},\qquad H_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\ dx.$$

corrigé succinct : $\boxed{A=[-1/x]_1^{+\infty}=1,}$ $\boxed{B=[2\sqrt{x}]_0^1=2,}$

$C=[\ln x-\ln(x+1)]_1^{+\infty}=[\ln\dfrac{x}{x+1}]_1^{+\infty}$ donc $\boxed{C=\ln 2}$ (on regroupe les deux logarithmes pour éviter une forme indeterminée),

$D=[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)]_1^{+\infty}$, $\boxed{D=\dfrac{\ln 2}{2}.}$

$E=\mathrm{im}(\int_0^{+\infty}e^{(-1+i)x}\ dx)=\mathrm{im}([\dfrac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}]_0^{+\infty})=\mathrm{im}(\dfrac{-1}{-1+i})$, $\boxed{E=\dfrac{1}{2},}$

$\boxed{F=[\dfrac{e^{-r^2}}{2}]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{2},}$

Pour G, on remarque que $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, et on a donc $\boxed{G=[\arctan(x+1)]_0^{+\infty}=\pi/2-\pi/4=\pi/4,}$

On montre par intégration par parties ($u'(x)=e^{-x}$, $v(x)=x^n$) que si $n\geq 1$, $H_n=nH_{n-1}$, et on a $H_0=1$, donc $\boxed{H_n=n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1=n!.}$

7. * Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ converge et que $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ ne converge pas.

corrigé succinct : Remarquons tout d'abord que ces intégrales ne posent pas de problème en 0 : les fonctions se prolongent par continuité.

On peut donc se contenter d'étudier la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ et $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$.

Pour la première, une intégration par parties avec $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=1/x$ permet de se ramener à l'étude de l'intégrale de $\dfrac{\cos x}{x^2}$ qui est convergante (on majore en valeur absolue la fonction intégrée par $\dfrac{1}{x^2}$).

Pour la deuxième, on peut dire : si l'intégrale est convergente, alors l'intégrale de $\dfrac{\sin^2 x}{x}$ aussi, car $\sin^2 x\leq\sin x$. Mais $2\sin^2 x=1-\cos 2x$. Le même type de raisonnement que précédemment montre que l'intégrale de $\dfrac{\cos 2x}{x}$ converge, donc celle de $\dfrac{1}{x}$ devrait converger, ce qui est absurde.

exercices pratiques

1. * **Surface de l'orbite de la Terre** La Terre parcourt durant l'année une orbite elliptique d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $a=1,496.10^{11}$m, $b=1,4958.10^{11}$m. Calculer la surface de l'orbite.
   Quel serait le rayon d'une orbite circulaire de même surface ?

   corrigé succinct : Le quart d'ellipse supérieur droit a pour équation $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, donc la surface cherchée est $4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$, autrement dit $4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$ avec le changement de variable $x=a\sin\theta$.
   En utilisant $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, on en déduit le résultat est πab.
   AN : $S=7,0372.10^16$ km^2.
   Le rayon serait tel que $\pi r^2=\pi ab$, donc $r=\sqrt{ab}$, autrement dit le rayon est la moyenne géométrique de a et de b : $\boxed{r=1.4959.10^{11}.}$

2. Calculer la valeur moyenne des courants de période T suivants :

   signal sinusoïdal : $i_1(t)=I_0\sin\frac{2\pi}{T}t$

   signal sinusoïdal redressé simple alternance :
   $$i_2(t)=\begin{cases} I_0\sin\frac{2\pi}{T}t \text{ si } kT\le t<kT+T/2,\\ 0 \text{ si } kT+T/2\le t<(k+1)T,\end{cases}$$

   signal sinusoïdal redressé double alternance :
   $$i_3(t)=\begin{cases} I_0\sin\frac{2\pi}{T}t \text{ si } kT\le t<kT+T/2,\\ -I_0\sin\frac{2\pi}{T}t \text{ si } kT+T/2\le t<(k+1)T,\end{cases}$$

   corrigé succinct : On veut calculer les $\frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$. On trouve respectivement 0, $\frac{I_0}{\pi}$ et $\frac{2I_0}{\pi}$.