1. Donner une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + 3y = 0$

corrigé succint :

L'équation caractéristique est $X^2 + X + 3 = 0$ de discriminant -11.

Les racines de l'équation caractéristique sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$, et les fonctions solutions sont donc les combinaisons linéaires des deux fonctions $e^{-x/2}\cos(\sqrt{11}x/2)$ et $e^{-x/2}\sin(\sqrt{11}x/2)$.

2. Inverser :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -8 \\ 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

corrigé succint : On peut résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, c'est-à-dire exprimer x, y, z en fonction de x', y', z' : les coefficients utilisés sont ceux de A^{-1}.

Ou bien utiliser la méthode détaillée en cours : on place A et I_3 côte-à-côte :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on réalise des opérations **sur les lignes** (uniquement, pas les colonnes) qui permettent de transformer A en I. On se retrouve alors, du côté droit de l'expression, avec la matrice A^{-1}.

Ici on peut commencer par ajouter L_1 à L_2 et $-2L1$ à L_3 pour faire apparaître deux zéros sur la première colonne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Puis on ajoute $3L_3$ à L_2, et **ensuite** on change tous les signes de la ligne L_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Puis on échange juste L_2 et L_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 35 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

puis on divise L_3 par 35 et **ensuite** on ajoute $13L_3$ à L_2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array}\right)$$

pour terminer, on ajoute $-2L_2 + 5L_3$ à la ligne L_1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -21/35 & 7/35 \\ 0 & 1 & 0 & 5/35 & 13/35 & 4/35 \\ 0 & 0 & 1 & -5/35 & 1/35 & 3/35 \end{array}\right)$$

On trouve donc, en sortant le coefficient $1/35$:

$$A^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 0 & -21 & 7 \\ 5 & 13 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Par la même méthode, on obtient $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

et $C^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 \\ -17 & 10 & -28 \\ 7 & -5 & 13 \end{pmatrix}$

3. Calculer les déterminants :

(a) $\begin{vmatrix} 30 & 10 & -5 \\ 36 & 2 & 4 \\ -6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

4. Déterminer les suites définies par les relations de récurrence d'ordre 2 :

(a) $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$

(b) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$

(c) $u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 5$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$.

corrigé succint :

(a) On écrit l'équation caractéristique $X^2 = X + 1$ soit $X^2 - X - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et de solutions $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Alors les suites solutions sont de la forme $u_n = A(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

Ici on peut utiliser les conditions initiales : $u_0 = 0$ donc on a $A + B = 0$, $A = -B$.

Et comme $u_1 = 2$ on a $A\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + B\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 2$ donc $A\sqrt{5} = 2$, $A = 2/\sqrt{5}$. Et comme on sait que $B = -A$, $B = -2/\sqrt{5}$.

Ainsi, finalement $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{5}}((\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

(b) On écrit l'équation caractéristique $X^2 = 2X - 1$ soit $X^2 - 2X + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 0$, et de solution double 1.

Alors les suites solutions sont de la forme $u_n = A1^n + Bn1^n = A + Bn$.

Comme $u_0 = 1$ on a $A = 1$. Comme $u_1 = -1$ on a $A + B = -1$. Ainsi $A = 1$ et $B = -2$, ainsi $u_n = 1 - 2n$

(c) 1) L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2$ a pour solution $r = -1 \pm i$. On met ces racines sous forme exponentielles $\rho e^{i\theta}$ avec ici $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \pm 3\pi/4$ (module et argument).
Donc on peut écrire $u_n = \sqrt{2}^n(a\cos(3n\pi/4) + b\sin(3n\pi/4))$, a, b réels.

2) Par ailleurs, 1 est une suite constante solution qui vérifie la relation.

3) Ainsi, $u_n = 1 + \sqrt{2}^n(a\cos(3n\pi/4) + b\sin(3n\pi/4))$.

4) En utilisant les conditions initiales on voit que : $1 + a = 0$, $1 - a + b = 2$ donc $a = -1$, $b = 0$.

Ainsi, $u_n = 1 - \sqrt{2}^n\cos(3n\pi/4)$.

5. On fixe un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct.

Si $\vec{\omega}(\alpha, \beta, \gamma)$ est un vecteur, vérifier que $\vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{\omega}$ est linéaire, et déterminer sa matrice, son noyau, son image.

On a bien, pour tout réel λ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les égalités $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{\omega} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{\omega})$, et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{\omega} = \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \vec{v} \wedge \vec{\omega}$, donc l'application est linéaire. et on peut la représenter par une matrice.

Pour déterminer sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il suffit de calculer en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ l'image de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. On calcule donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\gamma\\\beta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\\0\\-\alpha\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix}$.

La matrice est donc $\begin{pmatrix}0 & \gamma & -\beta\\-\gamma & 0 & \alpha\\\beta & -\alpha & 0\end{pmatrix}$, elle est antisymétrique (opposée de sa transposée).

Le **noyau de l'application** est l'ensemble des vecteurs dont l'image est nulle : par définition du produit vectoriel, c'est donc l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{\omega}$, que l'on peut noter $\mathbb{R}\vec{\omega}$ ou $\mathrm{Vect}(\vec{\omega})$.

L'**image de l'application** est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{u} \wedge \vec{\omega}$ où $\vec{u}$ est un vecteur quelconque.

Il est clair que $\mathrm{Im}(f)$ est contenu dans l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{\omega}$.

À l'inverse si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{\omega}$, on pose $\vec{u} = \vec{v} \wedge \omega/||\vec{\omega}||^2$.

Alors (formule du double produit vectoriel) :
$f(\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{\omega} = (\vec{v} \wedge \vec{\omega})\omega/||\vec{\omega}||^2 - (\vec{\omega}.\vec{\omega})\vec{v}/||\vec{\omega}||^2 = \vec{v}$.

Ainsi, tous les élements du plan orthogonal à $\vec{\omega}$ sont dans l'image de f : l'image de f est bien le plan orthogonal à $\vec{\omega}$.

6. On considère l'application f de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même qui au vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ associe le vecteur $\begin{pmatrix}3x + y - 2z + t\\y + 2z - t\\x + z - 3t\\4x + 2y + z - 3t\end{pmatrix}$

Montrer que l'application est linéaire, déterminer son noyau (l'ensemble des vecteurs dont l'image est nulle), son image (l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire $f(x, y, z, t)$ pour au moins un choix de coordonnées x, y, z et t) et sa matrice dans la base canonique.

corrigé succint :

7. Soit $A = \begin{pmatrix}4 & 0 & 3\\-2 & 2 & -3\\-2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
(b) En déduire les valeurs propres de A.
(c) En déduire les vecteurs propres de A.
(d) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
(e) En déduire l'expression de A^n.

(f) Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 4x+3z \\ y' & = & -2x+2y-3z \\ z' & = & -2x-z \end{array}\right.$.

corrigé succint :

(a) C'est $\begin{vmatrix} 4-X & 0 & 3 \\ -2 & 2-X & -3 \\ -2 & 0 & -1-X \end{vmatrix}$, soit après calcul $-X^3+5X^2-8X+4$.

(b) La factorisation du polynôme caractéristique est $-(X-1)(X-2)^2$, donc les valeurs propres sont 1 et 2.

(c) Pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre 1, on résoud le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3z & = & x \\ -2x+2y-3z & = & y \\ -2x-z & = & z \end{array}\right.$, qui se ramène facilement à $\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ 2x-y+3z & = & 0 \end{array}\right.$, donc on trouve comme solutions tous les vecteurs de la forme $x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre 2, on résoud le système $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3z & = & 2x \\ -2x+2y-3z & = & 2y \\ -2x-z & = & 2z \end{array}\right.$, qui se ramène facilement à l'équation $2x+3z=0$, donc on trouve comme solutions tous les vecteurs de la forme $x\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (par exemple) forment une base car le déterminant de la matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ vaut -1 (développement selon la dernière colonne...) et donc est non nul. Ainsi la matrice est diagonalisable, et $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) On a donc $A=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$, donc $A^n=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}$.

Pour calculer P^{-1} on résoud le système

$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & x+3y \\ b & = & -x+z \\ c & = & -x-2y \end{array}\right.$, c e qui donne $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2a-3c \\ y & = & a+c \\ z & = & -2a+b-3c \end{array}\right.$,

donc $P^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Finalement, $A^n=\begin{pmatrix} -2+3.2^n & 0 & -3+3.2^n \\ 2-2^{n+1} & 2^n & 3-3.2^n \\ 2-2^{n+1} & 0 & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$

(f) Il s'agit de résoudre $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On définit X,Y et Z par la relation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, soit aussi $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

remarque 1 : Il ne sera nulle part nécessaire ici d'expliciter le calcul de X, Y, Z en fonction de x, y, z (ce qui serait faisable en utilisant le calcul de P^{-1} effectué à la question précédente).

remarque 2 : P est constante, la dérivée de $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est $P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$.

Alors en multipliant par P^{-1} le système devient $P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}=$ $P^{-1}AP\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, soit $X'=X, Y'=2Y, Z'=2Z$.

Les solutions sont donc $X=\alpha e^t$, $Y=\beta e^{2t}$ et $Z=\gamma e^{2t}$, et par conséquent,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha e^t+3\beta e^{2t} \\ -\alpha e^t+\gamma e^{2t} \\ -\alpha e^t-2\beta e^{2t} \end{pmatrix}$,

α, β et γ étant des réels quelconques (on pourrait les déterminer si on donnait 3 conditions initiales pour le système d'équations différentielle, par exemple les valeurs en 0 des fonctions que l'on cherche x, y et z).

8. Soit $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de B.

(b) En déduire les valeurs propres de B.

(c) En déduire les vecteurs propres de B.

(d) La matrice B est-elle diagonalisable ?

(e) Déterminer un vecteur Z qui n'est pas un vecteur propre de B mais tel que $(B-I)^2Z=0$

(f) On note X et Y des vecteurs propres (les plus simples possibles) associés aux valeurs propres de B. On construit P la matrice formée des colonnes X, Y et Z. Calculer P^{-1} puis $P^{-1}BP$.

(g) En utilisant la question précédente résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 4x-2y-z \\ y' & = & 2x \\ z' & = & x-y \end{array}\right. .$$

corrigé succint :

On trouve pour la valeur propre 1 le vecteur $X=(1,2,-1)$ et ses multiples, et pour la valeur propre 2 le vecteur $Y=(1,1,0)$.

$(A-I)^2$ vaut $\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc le vecteur Z a des coordonnées qui doivent vérifier $4x-3y-2z=0$. On peut prendre $Z=(1,0,2)$ par exemple ce n'est pas un vecteur propre.

Si on pose alors

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

alors $P^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

et avec $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$,

on calcule $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Si on pose alors $\begin{pmatrix}U\\ V\\ W\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$,

alors l'équation $B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix}U'\\ V'\\ W'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U\\ V\\ W\end{pmatrix}$.

Donc $W(t)$ est de la forme $W(t)=\lambda e^t$, et de même $V(t)$ est de la forme $V(t)=\mu e^{2t}$ (on résoud des équations linéaires du premier ordre sans second membre à coefficients constants).

On a ensuite une équation $U'(t)=U(t)+\lambda e^t$, qui a pour solution de l'équation sans second membre les fonctions νe^t, et une solution particulière λte^t, donc finalement $U(t)=\nu e^t+\lambda te^t$.

On peut alors calculer $P\begin{pmatrix}U\\ V\\ W\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\nu e^t+\lambda te^t\\ \mu e^{2t}\\ \lambda e^t\end{pmatrix}$ pour trouver les lignes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

9. On souhaite déterminer les suites définies par $u_{n+1}=u_n+v_n$ et $v_{n+1}=3u_n-v_n$, avec les conditions initiales $u_0=1$, $v_0=5$.

   Écrire sous une forme matricielle $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$ ces égalités.

   Diagonaliser la matrice A.

   En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.

corrigé succint :

On peut écrit sous forme matricielle les relations de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire successivement :

$$\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n-1}\\ v_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}u_{n-2}\\ v_{n-2}\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix}$$

Il suffit donc de calculer $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^n$ pour conclure !

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\begin{vmatrix}1-X & 1\\ 3 & -1-X\end{vmatrix}=X^2-4$, et les valeurs propres sont 2 et -2.

Les vecteurs propres associés à 2 sont les (x,x), $x\in\mathbb{R}$.

Les vecteurs propres associés à -2 sont les $(x,-3x)$, $x\in\mathbb{R}$.

On peut donc poser $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ et la matrice de départ est diagonalisable, avec

$$P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}^n=P\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}P^{-1}$.

Il reste donc à calculer P^{-1} (formule vue en semestre 2 pour les matrices 2×2) :

$$P^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

et finir le calcul par deux multiplications de matrices 2×2...et on obtient

$$A^n=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3.2^n+(-2)^n & 2^n-(-2)^n\\ 3.2^n-3(-2)^n & 2^n+3(-2)^n\end{pmatrix}$$

et finalement $\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3.2^n+(-2)^n & 2^n-(-2)^n\\ 3.2^n-3(-2)^n & 2^n+3(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}-(-2)^n\\ 2^{n+1}+3(-2)^n\end{pmatrix}$.

10. **Système mécanique**

    On attache deux ressorts identiques, de longueur au repos L, de raideur k et de masses négligeables à trois points de masses identiques m.

    On suppose que les seules forces exercées sur les points sont les forces de rappel des ressorts.

    On fixe un repère horizontal avec un vecteur unitaire $\vec{\imath}$ dirigé vers la droite, et on note x_1, x_2 et x_3 les abscisses des points, et on définit les variables $u_1=x_1+L$, $u_2=x_2$, $u_3=x_3-L$.

(a) Déterminer le système d'équations différentielles que vérifient les fonctions u_1, u_2, u_3.

(b) Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice correspondante.

(c) Interpréter physiquement.

corrigé succint :

(a) La force appliquée sur l'objet de gauche vaut $k((x_2-x_1)-L)) = k(x_2-(x_1+L)) = k(-u_1+u_2)$.

Ainsi en appliquant le PFD à cet objet, $u_1'' = -k/m\,u_1 + k/m\,u_2$.

En l'appliquant de même aux deux autres objets, on trouve le système

$$\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k/m & k/m & 0 \\ k/m & -2k/m & k/m \\ 0 & k/m & -k/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

b)Le polynôme caractéristique de cette matrice $\begin{vmatrix} -k/m-X & k/m & 0 \\ k/m & -2k/m-X & k/m \\ 0 & k/m & -k/m-X \end{vmatrix}$ vaut, en remplaçant L_1 par $L_1+L_2+L_3$ puis en mettant $-X$ en facteur sur la première ligne :

$$-X\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k/m & -2k/m-X & k/m \\ 0 & k/m & -k/m-X \end{vmatrix}$$

Puis en enlevant k/m fois la première ligne à la seconde :

$$-X\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3k/m-X & 0 \\ 0 & k/m & -k/m-X \end{vmatrix}$$

soit finalement $-X(-X-3k/m)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k/m & -k/m-X \end{vmatrix}$ et en développant selon la deuxième ligne : $-X(-X-3k/m)(-X-k/m)$.

Les valeurs propres sont donc 0, $-k/m$ et $-3k/m$.

Elles sont associées respectivement aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a 3 valeurs propres différentes donc la matrice est diagonalisable. Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique des vecteurs propres, alors $P^{-1}AP = D$ avec A la matrice du système définie plus haut, et D la matrice diagonale de coefficients 0, $-k/m$ et $-3k/m$.

(b) Introduisons les fonctions U_1, U_2, U_3 par $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}\begin{pmatrix} u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} -k/m & k/m & 0 \\ k/m & -2k/m & k/m \\ 0 & k/m & -k/m \end{pmatrix} PP^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{pmatrix} U_1'' \\ U_2'' \\ U_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k/m & 0 \\ 0 & 0 & -3k/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond aux 3 équations différentielles :

$U_1'' = 0$, de solutions $U_1 = (at+b)$

$U_2'' = -k/mU_2$, de solutions $U_2 = c\cos(\sqrt{k/m}t) + d\sin(\sqrt{k/m}t)$

$U_3'' = -3k/mU_3$, de solutions $U_3 = e\cos(\sqrt{3k/m}t) + f\sin(\sqrt{3k/m}t)$

Et ensuite $u_1 = U_1 - U_2 + U_3$

$u_2 = U_1 - 2U_3$

$u_3 = U_1 + U_2 + U_3$

On obtient trois solutions fondamentales :

— si seule U_1 est non nulle :

mouvement de translation rectiligne uniforme de l'ensemble (sans déformation des ressorts)

— si seule U_2 est non nulle :

oscillations à la pulsation $\sqrt{k/m}$ et en opposition de phase des deux points extérieurs, le point 2 restant fixe

— si seule U_3 est non nulle :

oscillations en phase des points extérieurs à pulsation $\sqrt{3k/m}$, le point 2 oscillant en opposition de phase et amplitude double.

11. **matrices et optique**

Dans le cadre de l'approximation de Gauss, on modélise la propagation d'un rayon dans un milieu homogène d'indice 1 par un vecteur $\begin{pmatrix} h \\ \nu i \end{pmatrix}$ où :

h est la hauteur (mesurée verticalement depuis l'axe optique),

i l'angle qu'il fait avec l'horizontale,

et ν un nombre qui est égal à 1 si le rayon se propage dans le sens normal (de gauche à droite), -1 sinon.

Un système optique (composé de lentilles, miroirs, etc.) est modélisé par une matrice M de taille 2×2 de sorte que l'on ait

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix},$$

avec $\begin{pmatrix} h_1 \\ \nu_1 i_1 \end{pmatrix}$ le rayon entrant dans le système et $\begin{pmatrix} h_2 \\ \nu_2 i_2 \end{pmatrix}$ le rayon sortant du système.

Quand un système est composé de plusieurs éléments, sa matrice est obtenue en multipliant les matrices des éléments qui le composent, en indiquant de droite à gauche les matrices des éléments successivement rencontrés.

(a) montrer que la matrice d'une zone transparente de longueur D est $\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) montrer que la matrice d'un miroir sphérique de rayon R est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire la matrice d'une cavité laser constituée de deux miroirs sphériques concaves de rayons R_1 et R_2 et séparés d'une distance D. Pour cela on prendra en compte un aller-retour complet (2 traversées et 2 réflexions, attention à l'ordre !)

(d) On obtient donc une matrice 2×2 que l'on notera :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Vérifier que $ad - bc = 1$

(e) On note h_n la hauteur au bout de n aller-retour dans la cavité.

Montrer que pour tout n, $h_{n+2} - (a+d)h_{n+1} + h_n = 0$, puis en déduire une expression de h_n.

(f) Trouver la condition sur a et d pour la suite ne diverge pas et que les hauteurs successives restent bornées.

Montrer que cette condition s'exprime sous la forme $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ avec $g_i = 1 - D/R_i$

(a) Sur une zone transparente de longueur D, l'angle ne change pas $i_2 = i_1$,

et par ailleurs la tangente de cet angle vaut $(h_2 - h_1)/D$.

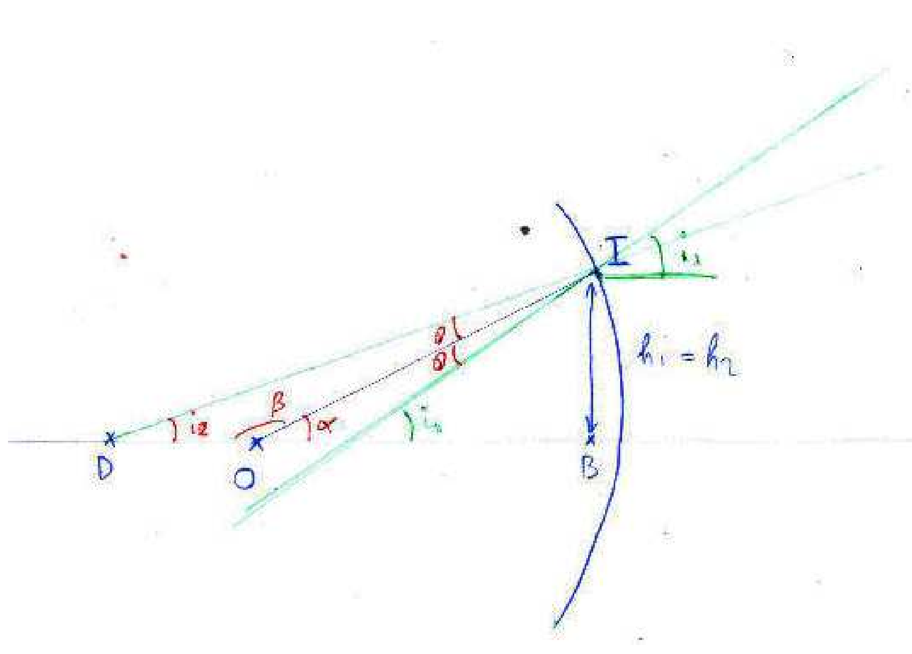
Comme l'angle est petit, la tangente est égale à l'angle, et finalement :

$i_2 = i_1$

et $h_2 - h_1 = D\tan(i_1)$ soit $h_2 = h_1 + Di_1$.

La matrice d'une zone transparente de longueur D est ainsi bien $\begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Avec le schéma suivant :



On voit que $\tan(\alpha) = h_1/OB$, soit par approximation $h_1/R = \alpha$.

Dans le triangle OIB la somme des angles vaut π, donc $\alpha + \pi/2 + (\theta + (\pi/2 - i_1)) = \pi$, et donc $\alpha = i_1 - \theta$.

Dans le triangle DIO la somme des angles vaut π, donc $i_2 + \beta + \theta = \pi$ soit $i_2 + (\pi - \alpha) + \theta = \pi$, et donc $i_2 = 2\alpha - i_1$.

Au final on obtient :

$h_2 = h_1$ et $i_2 = 2h/R - i_1$.

Comme ici $\nu_2 = -1$, la matrice obtenue est bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire la matrice d'une cavité laser constituée de deux miroirs sphériques concaves de rayons R_1 et R_2 et séparés d'une distance D. Pour cela on prendra en compte un aller-retour complet (2 traversées et 2 réflexions, attention à l'ordre !)

Dans la cavité un rayon parcourt une distance D, est réfléchi par le premier miroir de rayon R_1, parcourt une distance D, est réfléchi par le second miroir de rayon R_2.

Il suffit donc de calculer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit en deux étapes pour profiter de deux calculs identiques :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & D \\ -2/R_2 & 1-2D/R_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & D \\ -2/R_1 & 1-2D/R_1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1-2D/R_1 & 2D-2D^2/R_1 \\ -2/R_1-2/R_2+4D/(R_1R_2) & 1-2D/R_1-4D/R_2+4D^2/(R_1R_2) \end{pmatrix}.$$

(d) Le déterminant $ad-bc$ de la matrice précédente vaut donc $(1-2D/R_1)(1-2D/R_1-4D/R_2+4D^2/(R_1R_2))-(2D-2D^2/R_1)(-2/R_1-2/R_2+4D/(R_1R_2))$ soit

$1-2D/R_1-2D/R_1+4D^2/R_1^2-4D/R_2+8D^2/(R_1R_2)+4D^2/(R_1R_2)-8D^3/(R_1^2R_2)-(-4D/R_1+4D^2/R_1^2-4D/R_2+4D^2/(R_1R_2)+8D^2/(R_1R_2)-8D^3/(R_1^2R_2))=$

$1-4D/R_1+4D^2/R_1^2-4D/R_2+12D^2/(R_1R_2)-8D^3/(R_1R_2)\ +4D/R_1-4D^2/R_1^2+4D/R_2-12D^2/(R_1R_2)+8D^3/(R_1^2R_2))=1$

(e) Soit n un entier positif. En appliquant la matrice du système optique aux vecteurs $\begin{pmatrix} h_n \\ i_n \end{pmatrix}$ on obtient les vecteurs $\begin{pmatrix} h_{n+1} \\ i_{n+1} \end{pmatrix}$, et donc les relations ligne à ligne :

$(\alpha) : h_{n+1} = ah_n + bi_n$

et

$(\beta) i_{n+1} = ch_n + di_n$.

En isolant i_n dans la relation (α) on obtient la relation équivalente $(\gamma) i_n = (h_{n+1}-ah_n)/b$.

En reportant cela dans (β) :

$i_{n+1} = ch_n + (d/b)((h_{n+1}-ah_n)$, soit en multipliant par b :

$bi_{n+1} = bch_n + dh_{n+1} - adh_n$, et comme $bc-ad=-1$, on obtient la relation $(\delta) bi_{n+1} = -h_n + dh_{n+1}$.

Si enfin on applique (α) avec l'indice $n+1$ en utilisant (δ) : $h_{n+2} = ah_{n+1} + bi_{n+1} = ah_{n+1} + dh_{n+1} - h_n$, ce que l'on voulait prouver.

Pour en déduire une expression de h_n, on peut utiliser la méthode habituelle de détermination : l'équation caractéristique est $X^2-(a+d)X+1=0$, le discriminant est $(a+d)^2-4=(a+d-2)(a+d+2)$ et selon son signe on peut expliciter les solutions.

(f) Si les racines sont réelles, le produit est 1 donc l'une sera plus grande que 1 : la suite ne peut pas converger ! Il faut donc que les racines soient complexes, et le discriminant strictement négatif, ce qui impose $(a+d)^4-4<0$ soit $-2<a+d<2$ soit $0<a+d+4<4$.

Mais $a+d+2 = 4-4D/R_1-4D/R_2+4D^2/(R_1R_2) = 4(1-D/R_1-D/R_2+D^2/(R_1R_2)) = 4g_1g_2$,

on obtient bien la condition $0<g_1g_2<1$.

(g) **remarque :** on peut aussi remplacer ces deux questions par un raisonnement basé uniquement sur les valeurs propres :

i. on rappelle que si les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ sont notées λ_1 et λ_2, le polynôme caractéristique s'écrit à la fois $X^2-(a+d)X+(ad-bc)$ et $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^2-(\lambda_1+\lambda_2)X+\lambda_1\lambda_2$.

ii. ainsi ici, la somme des valeurs propres λ_1 et λ_2 vaut $a+d$, pendant que leur produit vaut $ad-bc=1$.

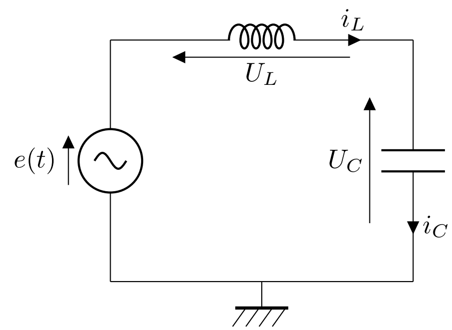
iii. si les valeurs propres sont réelles et distinctes, leur produit valant 1, l'une est forcément strictement supérieure 1 ou strictement inférieure à -1. On suppose que c'est λ_1.

Mais alors si on diagonalise $M = PDP^{-1}$, avec D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et si on note X le vecteur $P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on constate que $A^nX = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ 0 \end{pmatrix}$ ne converge pas...c'est impossible si on veut que **tout** rayon reste dans la cavité.

iv. on doit donc avoir un discriminant négatif, soit $(a+d)^2-4(ad-bc) = (a+d)^2-4 = (a+d-2)(a+d+2) \leq 0$.

12. **Circuit électrique**

Soit le circuit électrique suivant :



On considère les variables i_L et u_C.

(a) **Régime libre** On considère que la source de tension est éteinte : $e=0$.

Au départ, le condensateur est chargé avec une charge q_0 (donc tension U_0 aux bornes de u_C) et $i_L(0)=0$.

i. Rappeler les relations entre i_C et u_C, puis entre i_L et u_L.
ii. Écrire une loi des mailles pour relier les 2 variables qui nous intéressent.
iii. Écrire une loi des nœuds, pour établir une deuxième relation entre ces variables.
iv. Traduire ces deux relations sous forme matricielle.
v. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice et ses valeurs propres (complexes). Puis en déduire les vecteurs propres.
vi. La matrice est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

vii. Résoudre le système différentiel.

(b) **Régime forcé** On considère maintenant que la source $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

À l'instant initial, le condensateur est déchargé (en raison des résistances intrinsèques au circuit) et $i_L(0) = 0$.

i. Faire apparaître la nouvelle forme matricielle du problème.

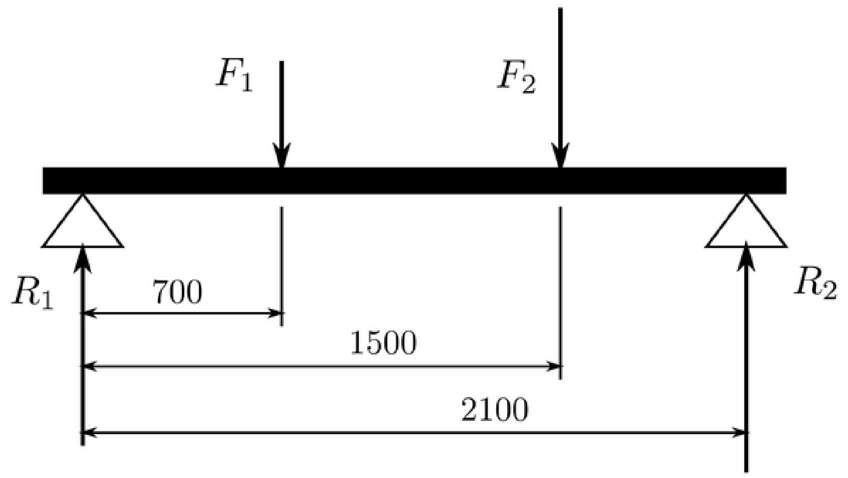
Effectuer le changement de base pour retrouver les équations différentielles précédentes avec maintenant un second membre.

ii. Résoudre le système différentiel.

iii. Que se passe-t-il quand $\omega = 1/\sqrt{LC}$?

13. **Système mécanique**

Une poutre, sur laquelle on exerce deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, est posée sur deux supports :



On cherche les réactions $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ telles que la poutre soit stable et immobile.

(a) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la poutre pour obtenir la première relation entre R_1 et R_2

(b) Appliquer le théorème des moments cinétiques au point d'application de la force F_1 pour obtenir la seconde relation entre R_1 et R_2

(c) Reformuler le problème pour le mettre sous la forme matricielle.

(d) Résoudre le problème en utilisant la matrice obtenue précédemment.