U.J.F. (Grenoble I) DUT GMP 17/11/2003 Devoir en temps libre

Calcul de longueur en polaires :

Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation polaire $\rho = \sin\theta$ pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Fonctions hyperboliques :

On rappelle la définition des fonctions hyperboliques :
pour $t \in \mathbb{R}$

$\mathrm{sh}(t) = (e^t - e^{-t})/2$ (sinus hyperbolique),

$\mathrm{ch}(t) = (e^t + e^{-t})/2$ (cosinus hyperbolique) et

$\mathrm{th}(t) = \mathrm{sh}(t)/\mathrm{ch}(t)$ (tangente hyperbolique).

Retrouver rapidement les résultats suivants :

1. $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$
2. $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
3. $\mathrm{th}' = 1/\mathrm{ch}^2 = 1 - \mathrm{th}^2$
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(t) \geq 1$.
5. $\lim_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, $\lim_{+\infty} \mathrm{sh} = +\infty$
6. $\lim_{-\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, $\lim_{-\infty} \mathrm{sh} = -\infty$
7. $\lim_{+\infty} \mathrm{th} = 1$, $\lim_{-\infty} \mathrm{th} = -1$

Etude de la tractrice :

L'objet de cette partie est l'étude de la tractrice (T), donnée par :

$$(T) \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t - \mathrm{th}(t) \\ y(t) & = & 1/\mathrm{ch}(t) \end{array} \right.$$

1. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la courbe sur $[0, +\infty[$
2. Dresser le tableau de variations de (T)
3. Déterminer un vecteur tangent à (T) en $t = 0$.
4. Montrer que (T) admet en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote horizontale dont on donnera une équation.
5. Calculer la longueur de la courbe entre les points $t = 0$ et $t = a$, $a > 0$.
6. Montrer que la développée de la courbe est la chaînette (C) d'équation cartésienne $y = \mathrm{ch}(x)$.
7. Tracer sur un même dessin les courbes (T) et (C).