– Calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2}.$$
– Donner la solution générale de l'équation différentielle :
$$y' = 2y + 1.$$
– Calculer
$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$
– – Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
  – En déduire les solutions $(x_1(t), x_2(t))$ du système d'équations différentielles
$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) + 3x_2(t) \end{array}\right.$$
  – Vérifier que $(x_1(t) = e^t - e^{2t}, x_2(t) = e^t - 2e^{2t})$ est une solution de (S).
  – Tracer la courbe paramétrée $(x_1(t), x_2(t))$. [on placera x_1 en abscisse et x_2 en ordonnée]
– Donner le développement limité à l'ordre 2 en $t = 0$ de $\cos(t)$.
En déduire
$$\lim_{x\to 0} \frac{t^2}{1-\cos(t)}.$$
– Calculer grâce à une décomposition en éléments simples l'intégrale
$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$
– On considère le système d'équations différentieles linéaires (S) avec second membre :
$$(S)\left\{\begin{array}{llcl} x_1'(t) & -3x_1(t) + 2x_2(t) & = & 3e^{2t} \\ & & & \\ x_2'(t) & -4x_1(t) + 3x_2(t) & = & 0 \end{array}\right.$$
1. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.
   En déduire la solution générale du système sans second membre (S_0).
2. Trouver une solution particulière de (S).
   A l'aide de (a) en déduire la solution générale du système (S).
3. Quelle est la solution de (S) satisfaisant $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$?

– Soit (C) la courbe du plan paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = & t + \sin(2t) \\ y(t) = & \cos(t). \end{cases}$$

1. Que se passe-t-il si on change t en $t + \pi$?
   En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[-\pi/2, \pi/2]$.
2. Que se passe-t-il si on change t en $-t$?
   En déduire que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$.
3. Donner un vecteur tangent à la courbe en $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$.
4. Dresser le tableau de variations de x et y sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, où l'on placera la valeur $\pi/4$.
5. Tracer l'arc de la courbe (C) pour $t \in [0, \pi/2]$, puis, en justifiant votre méthode, la courbe (C) entière.

– Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$y' = 2y + 1.$$

– On considère le rectangle $R = [0, \pi] \times [0, \pi/2]$.
Calculer

$$\int\int_R \sin x \sin y \, dx dy.$$

– D est le domaine défini par les inégalités $y \leq 0 \leq x$ et $x^2 + y^2 \leq 1$.
Dessiner D.
Calculer

$$\int\int_D (x^2 + 2xy) \, dx dy.$$

(on pourra utiliser les coordonnées polaires)