IUT GMP2 Groupe K Mathématiques, 21/6/2004

Calculatrices autorisées ;

documents autorisés : 1 feuille A4 recto-verso uniquement.

1. On considère une cuve cylindrique de base circulaire, de rayon R et hauteur h.
   (a) Calculer la surface de la cuve.
   (b) Calculer par une intégrale triple en coordonnées cylindriques le volume de la cuve.
   (c) Comment choisir R et h pour obtenir une cuve de volume $2m^3$ et de surface minimale ?
2. Soit T le triangle de sommets $(0,0)$, $(\pi,0)$ et $(\pi,2\pi)$. Calculer l'intégrale
$$I = \int\int_T \cos^2 x \,\sin y \; dxdy.$$
3. On considère le solide de densité volumique constante égale à 1
$C = \{(x,y,z) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
   (a) Reconnaître C. Donner sa masse et les coordonnées de son centre d'inertie.
   (b) Calculer le moment d'inertie de C par rapport au point $(0,0,0)$.
   (c) Calculer le moment d'inertie de C par rapport à la droite d'équations $x = y = -z$.
4. Dans le plan (Oyz) on considère $D = \{(y,z) \,|\, y \geq 0,\, z \leq y,\, y^2 + z^2 \leq 1\}$, puis le solide S obtenu en faisant pivoter D autour de l'axe (Oz).
   (a) Dessiner D et S.
   (b) Décrire S à l'aide des coordonnées sphériques.
   (c) Calculer la masse de S et les coordonnées de son centre de gravité (on considère que la densité volumique est constante égale à 1).
   (d) Calculer le moment d'inertie de S par rapport à l'axe (Oz).
5. On considère le solide $T = \{(x,y,z) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 0 < x+y+z < 1\}$, de densité volumique $\rho(x,y,z) = xyz$. On note G, de coordonnées (G_x, G_y, G_z), son centre de gravité.
   (a) Calculer la masse de T.
   (b) Expliquer (sans calculs) pourquoi $G_x = G_y = G_z$.
   (c) Calculer les coordonnées de G.