IUT GMP2 - Groupe J - Intégrales triples

A- Calculs élémentaires

1. Soit le tétraèdre $T = \{(x,y,z) \,|\, 0 \leq x \leq y \leq z \leq \pi/2\}$.
   Calculer $\int\int\int_T \sin(y+z)\, dxdydz$.
2. Soit le tétraèdre $T = \{(x,y,z) \,|\, 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ x+y+z \leq \pi/2\}$.
   Calculer $\int\int\int_T \cos x \cos y\, dxdydz$.
3. Soit le cylindre $C = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.
   Calculer $\int\int\int_C x^2 z\, dxdydz$.

B- Coordonnées sphériques

On repère un point (x,y,z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ par ses coordonnées sphériques $r > 0$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi[$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \sin\theta \cos\varphi \\ y & = & r\sin\theta \sin\varphi \\ z & = & r\cos\theta \end{array} \right. .$$

On transforme alors les intégrales selon la règle :

$$\int\int\int f(x,y,z) dxdydz = \int\int\int f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi.$$

1. Calculer le volume d'une boule de rayon R.
2. Si B est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, calculer :
   (a) $\int\int\int_B (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$.
   (b) $\int\int\int_B (x^2+xy+yz)\, dxdydz$.
   (c) $\int\int\int_B z\, dxdydz$.
3. Calculer $\int\int\int_V z\, dxdydz$ pour V la demi-boule supérieure de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1

C- Masse, centre de gravité, moments d'inertie

1. Soit le solide $H = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ de densité volumique 1.
   Déterminer les coordonnées du centre de gravité de H, puis les moments d'inertie I_O par rapport à l'origine et I_D par rapport à la droite $D = \{(x,y,z) \,|\, x = y = z\}$.
2. On considère le solide V homogène de densité 1, déterminé par le plan $z = 0$ et le paraboloide de révolution $z = 1-x^2-y^2$: $V = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$.
   (a) Calculer la masse de V.
   (b) Déterminer le centre de gravité de V.
   (c) Calculer le moment d'inertie de V par rapport à l'axe (Oz).
   (d) Calculer le moment d'inertie de V par rapport à l'axe (Ox).
3. Dans le plan (Oxz) on considère $D = \{(x,z) \,|\, x \geq 0,\ z \geq x,\ x^2+z^2 \leq 1\}$, puis le solide S obtenu en faisant pivoter D autour de l'axe (Oz).
   (a) Dessiner D et S.
   (b) Décrire S à l'aide des coordonnées sphériques.
   (c) Calculer la masse de S.
   (d) Soit G de coordonnées (G_x, G_y, G_z) le centre de gravité de V. Montrer que $G_x = G_y = 0$ et calculer G_z.
   (e) Calculer le moment d'inertie de S par rapport à l'axe (Oz).
   (f) Montrer que les moments d'inertie par rapport aux axes (Ox) et (Oy) sont égaux ; les calculer.