$\boxed{\text{UJF - Licence L2 \quad Janvier 2003}}$

Dans toute la feuille E est un espace vectoriel de dimension n sur un corps K et f un endomorphisme de E.

1. - Montrer que si f est nilpotent, $f^n = 0$.
   - Quel est le rang maximal pour un endomorphisme nilpotent ?
   - Monter que dim Ker $u^{i+j} \leq$ dim Ker u^i + dim Ker u^j.
   - En déduire une description des endomorphismes nilpotents de rang maximal.
2. Montrer qu'il existe des sous-espaces F et G de E stables par f tels que:
   . $E = F \oplus G$
   . $f_{|F}$ bijective
   . $f_{|G}$ nilpotent

   (on pourra considérer les $F_k = \mathrm{Im}(f^k)$ et $G_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$)
3. Calculer les polynômes minimaux et caractéristiques des matrices suivantes:
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -16 & 7 & -1 \\ -18 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$
   $$D = \begin{bmatrix} -10 & 12 & 3 \\ -11 & 13 & 3 \\ 8 & -10 & -3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
   Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.
4. On suppose f inversible. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.
5. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_f = \mu_{f,x}$ (on pourra décomposer μ_f en produit de puissances de facteurs irréductibles).
6. Quels sont les endomorphismes diagonalisables et nilpotents de E ?
7. Soit $f, g \in \mathrm{End}(E)$ diagonalisables. Montrer que si f et g commutent il existe une base de E qui les diagonalise simultanément.
8. On prend $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
   Si $f^2 = \mathrm{Id}_E$, f est-elle diagonalisable ?
   Même question pour $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
9. On suppose que K est un corps fini à q éléments. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.
10. On prend $K = \mathbb{R}$ et f tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$. f est-elle diagonalisable ? Montrer que n est somme directe de sous-espaces de dimension 2 stables par f.
11. (difficile mais original) Soit $A_n = \{M \in M_n(\mathbb{Z}) | \exists q \in \mathbb{N}^*, M^q = I_n\}$.
    Montrer qu'il existe un entier a_n tel que $\forall M \in A_n$, $M^{a_n} = I_n$.