TD1 - L2 groupe 1 - 2003/2004

I- Ensembles, applications : révisions

1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Comparer pour l'inclusion $C_E(A \cup B)$ et $C_E A \cap C_E B$.
   Même question avec $C_E(A \cap B)$ et $C_E A \cup C_E B$.
   ($C_E X$ désigne le complémentaire dans E de la partie X)
2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Les implications suivantes sont-elles vraies :
   (a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective
   (b) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ g injective
   (c) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ f surjective
   (d) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective
   (e) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective
   (f) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective
3. Soient $f : E \to F$, $X_0, X_1 \subset E$, $Y_0, Y_1 \subset F$. Comparer pour l'inclusion :
   (a) $f(X_0 \cap X_1)$ et $f(X_0) \cap f(X_1)$
   (b) $f(X_0 \cup X_1)$ et $f(X_0) \cup f(X_1)$
   (c) $f^{-1}(Y_0 \cap Y_1)$ et $f^{-1}(Y_0) \cap f^{-1}(Y_1)$
   (d) $f^{-1}(Y_0 \cup Y_1)$ et $f^{-1}(Y_0) \cup f^{-1}(Y_1)$
   (e) $f^{-1}(f(X_0))$ et X_0
   (f) $f(f^{-1}(Y_0))$ et Y_0
   Pour chacun des exemples ci-dessus, quand il n'y a pas égalité, quelle condition imposer sur f pour l'avoir (injectivité, surjectivité, ...) ?
4. Pour $A, B, C \subset E$, comparer pour l'inclusion $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Même question avec $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. Soit $f : E \to F$, on définit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ par $\varphi(X) = \{f(x), x \in X\}$.
   Montrer que :
   – φ est croissante
   – f injective $\Leftrightarrow$ φ injective
   – f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective
6. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E.
   Comparer $\cup_{n=0}^{\infty}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k)$ et $\cap_{n=0}^{\infty}(\cup_{k=n}^{\infty} A_k)$.

II- Relations d'équivalence

1. Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence ?
   (a) $=$ sur E, où E est un ensemble quelconque
   (b) $\leq$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $|$ sur $\mathbb{Z}$ (relation de divisibilité : $a|b$ si il existe c tel que $b = ac$)
   (d) Sur $\mathbb{R}_+^*$, xRy si $x^y = y^x$.
   Calculer les classes d'équivalence de $1/2$, 2, e.
   (e) Sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y)R(x', y')$ si $xy = x'y'$
   (f) Sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y)R(x', y')$ si $y - y' = x^2 - x'^2$
   (g) $\mathcal{E}$ étant un ensemble quelconque, $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$:
   ERF si il existe une bijection de E sur F.
   (h) $\mathbb{P}^*$ désignant l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2 (cf.la partie III), $p, q \in \mathbb{P}^*$, pRq si $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}^*$.
2. Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On définit la relation xRy si $(\forall A \in \mathcal{A})(\{x, y\} \subset A$ ou $\{x, y\} \subset C_E A)$. Montrer que R est une relation d'équivalence.
   Dans le cas $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$, décrire l'ensemble quotient E/R.
3. On considère la partition de $\mathbb{R}^2$ formée des cercles de centre $(0, 0)$. Quelle est la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ ayant ces cercles pour classes d'équivalence ?
   Même question avec l'ensemble des droites horizontales.
4. Soit R_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.
   Trouver une relation de récurrence entre R_n et les R_k, $k < n$ (fixer un élément, et raisonner sur sa classe d'équivalence).
   (réponse : $R_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k R_k$ avec $R_0 = 1$.)
   Calculer R_n pour $n \leq 6$. (réponse : 1,1,2,5,15,52,203.)
5. Sur $\mathbb{N}^2$ on définit la relation R par $(x, y)R(x', y')$ lorsque $x + y' = x' + y$.
   Vérifier que c'est une relation d'équivalence.
   Décrire les classes de $(1, 2)$ et $(0, 1)$.
   Donner un ensemble en bijection avec le quotient $\mathbb{N}^2/R$.
   Définir une addition sur $\mathbb{N}^2/R$ en s'aidant de celle de $\mathbb{N}$.
6. Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ on définit la relation R par $(x, y)R(x', y')$ lorsque $xy' = x'y$.
   Vérifier que c'est une relation d'équivalence.
   Décrire les classes de $(1, 2)$ et $(0, 1)$.
   Reconnaître le quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/R$.
   Définir une addition et une multiplication sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*/R$ en s'aidant de celles de $\mathbb{Z}$.
7. On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Sur $\mathbb{Z}$ on définit la relation R par xRy si $n|(x - y)$.
   Vérifier que c'est une relation d'équivalence. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient.
   Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
   Définir une addition et une multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en s'aidant de celles de $\mathbb{Z}$.

III- Arithmétique

On dit qu'un entier naturel n est irréductible (ou premier) s'il vérifie :

$$(\forall a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})(n = ab \Rightarrow a = 1 \text{ ou } b = 1)$$

1. Montrer que pour tout entier n, il existe n entiers consécutifs dont aucun n'est irréductible. (indication : considérer $m = (n+1)! + 2$)
2. Montrer que si $2^n - 1$ est irréductible, n l'est aussi.

   Montrer que si $2^n + 1$ est irréductible, n est une puissance de 2.
3. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers irréductibles de la forme $4n+3$. (indication : considérer les m premiers tels entiers $p_1 < \ldots < p_m$ et former $M = 4\prod_{i=2}^{m} p_i + 3$)
4. On admet la propriété suivante de $\mathbb{N}$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. En déduire :
   - qu'il n'existe pas de suite d'entiers positifs strictement décroissante
   - le principe de récurrence
   - la division euclidienne
5. Montrer que tout entier s'écrit comme produit de nombres irréductibles.
6. Donner la décomposition de 4840 en facteurs irréductibles. Imaginer un algorithme pour décomposer un nombre.
7. Vérifier que vous savez poser une division euclidienne.
8. Etant donnés 5 entiers, montrer que l'on peut en choisir 3 de sorte que leur somme soit divisible par 3.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Montrer qu'il existe un entier k tel que $n! < k < (n+1)!$ et $n^3 | k$.